目　　录

第一部分

第二部分

第一部分

第一章　函数、极限与连续

一、内容要点

本章内容包括函数及性质，极限概念与性质，求极限的方法，连续函数的概念、性质及应用.

求极限的一般方法：

1. 利用极限的四则运算及复合运算法则.

2. 利用无穷小的运算法则.

3. 利用无穷小与无穷大的关系.

4. 利用 $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A$ 为无穷小.

5. 利用两个重要极限.

6. 利用夹逼定理.

7. 利用单调有界准则及解方程.

8. 利用等价无穷小代换.

9. 利用函数的连续性.

10. 利用递推公式.

11. 利用合并或分项，因式分解，约分，变量代换，取对数等技巧.

12. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$.

13. 利用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

14. 利用函数极限与数列极限的关系，即若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0\,(x_n\neq x_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$；若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

（以下方法的例子见以后各章）

15. 利用洛必达法则.

16. 利用导数定义.

17. 利用微分中值定理与泰勒公式.

18. 利用定积分定义、定积分性质.

19. 利用收敛级数的性质.

常用的不等式：

1. 设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个正数，则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

关于等价无穷小：

1. 几个重要的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，$\sin x\simeq x$，$\tan x\simeq x$，$\arcsin x\simeq x$，$\arctan x\simeq x$，$1-\cos x\simeq\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\simeq x$，$e^x-1\simeq x$，$a^x-1\simeq x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\simeq\alpha x$.

2. 在自变量的某种趋向下，若 $\alpha\simeq\alpha'$，$\beta\simeq\beta'$，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}f=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}f$，$\lim\alpha f=\lim\alpha' f$. 当 $\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq1$ 时，$\lim(\alpha-\beta)f=\lim(\alpha'-\beta')f$.

二、例题选讲

例 1 证明：若对于任意 x,y，有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$，则对任意正整数 n，任意 a，b，有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2$$

证 若 $a=b$，结论显然成立.

若 $a\neq b$，不妨设 $a<b$，将 $[a,b]n$ 等分，设分点为 x_i，$i=0,1,2,\cdots,n$，则

$$|f(b)-f(a)| = \left|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}(b-a)^2$$

例 2 设函数 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b$ 均对称($a\neq b$). 求证: $f(x)$ 是周期函数.

证 由题意, 对$\forall x$, 有

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x)$$

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a+(x-a))=f(a-(x-a))\\&=f(2a-x)=f(b-(2a-x-b))\\&=f(b+(2a-x-b))=f(x+2(b-a))\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

例 3 设对一切实数 x, 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(1+x)=f\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}\qquad\left(\text{由题设}, f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=f(x)$$

故 $f(x)$是周期函数.

例 4 设 $F(x)$除 $x=0$ 与 1 两点外,对全体实数都有定义,并满足等式 $F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$,求函数 $F(x)$.

解 设已知等式为(1),将(1)中 x 换成 $\frac{x-1}{x}$ 得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x} \tag{2}$$

将(1)中 x 换成$-\frac{1}{x-1}$得

$$F\left(-\frac{1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1} \tag{3}$$

(1)+(3)−(2)得

$$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

例 5 如果 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数,且$\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=0$,求 $f(x)$.

解 对$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,由题意,$\exists$ 正数 T,使

$$f(x)=f(x+T)=\cdots=f(x+nT)$$

又由$\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=0$,得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x+nT)=0$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)$

解 由于

$$x-\ln x\cdot\sin x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\right)$$

当 $x\to+\infty$,$\frac{\ln x}{x}\to 0$,$\sin x$ 有界,故

$$\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\to 0$$

$$x-\ln x\cdot\sin x\to+\infty$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=\frac{\pi}{2}$$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}+\frac{1+2}{n^3}+\cdots+\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right]$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}(1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1))$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}[(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}[(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$=\frac{1}{6}$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$,其中$a>0,b>0$.

解 若$b=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n=1$

若$b\neq1$,设$y_n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{\frac{1}{n}\ln b}{a} = \frac{1}{a}\ln b = \ln b^{1/a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^n = b^{1/a}$$

例 10 求 $\lim_{x\to\infty}\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)x^4$

解 由于当 $x\to\infty$ 时，

$$\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2} \to 0$$

$$原式 = \lim_{x\to\infty} x^4 \tan\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \frac{\frac{2x^2+5}{x^2+1} - \frac{2x^2+7}{x^2+2}}{1 + \frac{2x^2+5}{x^2+1}\,\frac{2x^2+7}{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{(x^2+1)(x^2+2)+(2x^2+5)(2x^2+7)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

例 11 求 $\lim_{x\to a}\frac{x^x - a^a}{x-a}$ $(a>0, a\neq 1)$

解 $原式 = \lim_{x\to a}\frac{x^x - a^x}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{a^x - a^a}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} a^x \frac{a^{x\log_a x - x} - 1}{x-a} + \lim_{x\to a} a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x-a}$$

$$= a^a \lim_{x\to a}\frac{(x\log_a x - x)\ln a}{x-a} + a^a \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\ln a}{x-a}$$

$$= a^a \lim_{x\to a}\frac{x\left(\frac{\ln x}{\ln a} - 1\right)\ln a}{x-a} + a^a\ln a$$

$$= a^a \lim_{x\to a}\frac{x\ln\frac{x}{a}}{x-a} + a^a\ln a$$

$$= a^a \lim_{x\to a} \frac{x\ln\left[1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right]}{x-a} + a^a\ln a$$

$$= a^a \lim_{x\to a}\frac{x\left(\frac{x}{a}-1\right)}{x-a} + a^a \ln a$$

$$= a^a + a^a\ln a = a^a(1+\ln a)$$

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n+1]{x}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\sqrt[n+1]{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln x$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n+1]{x}\,\frac{1}{n(n+1)}\ln x$$

$$=\ln x$$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}\cdot\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})e^{-x}(e^{2x}-1)}{4x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})e^{-x}\cdot 2x}{4x}=-2$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{1+\left[\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right]}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{n}\left[(a_1+\cdots+a_n)\frac{1}{x}+b_2\frac{1}{x^2}+\cdots+b_n\frac{1}{x^n}\right]$$
$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

其中b_2，…，b_n分别为$\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)$的展开式中$\frac{1}{x^2}$，…，$\frac{1}{x^n}$的系数.

例 15 求$\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to1}\left[(1-\sqrt{1+(x-1)})(1-\sqrt[3]{1+(x-1)})\cdots\right.$
$$\left.(1-\sqrt[n]{1+(x-1)})\right]\Big/(1-x)^{n-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)\left(-\frac{1}{3}(x-1)\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}(x-1)\right)}{(1-x)^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

例 16 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-x\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\cdot\frac{\ln e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-\right.$
$$\left.x\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}-\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-1\right)-$$
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}-1\right)-$$
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4} - \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^3}$$

$$- \lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{1+\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5}}\cdot\frac{x}{e^x} = \frac{1}{4}-\frac{1}{3}-0=-\frac{1}{12}$$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\Big[1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}+$

$$\cos x\sqrt{\cos 2x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\Big]\Big/x^2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\cos x\,\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim_{x\to0}\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot$$

$$\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\cos x\,\frac{[1+(\cos 2x-1)]^{1/2}-1}{x^2}-$$

$$\lim_{x\to0}\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\frac{[1+(\cos 3x-1)]^{1/3}-1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}-\lim_{x\to0}\cos x\,\frac{\frac{1}{2}(\cos 2x-1)}{x^2}-\lim_{x\to0}\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot$$

$$\frac{\frac{1}{3}(\cos 3x-1)}{x^2}=\frac{1}{2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}(2x)^2\right)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}(3x)^2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$$

例 18 设 $a_i>0$，$i=1, 2, \cdots, m$，求

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}$$

解 令 $a=\max\limits_{1\le i\le m}\{a_i\}$，则

$$(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}\leqslant(a^n+a^n+\cdots+a^n)^{1/n}$$

$$=(ma^n)^{1/n}=a\sqrt[n]{m}$$

$$(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}\geqslant(a^n)^{1/n}=a$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt[n]{m}=a$

根据夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{1/n} = a = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}$$

例 19 空间物体 T_r 由所有到给定的凸多边形 S 的距离不超过 r 的点所组成，设 $V(r)$ 为其体积，求 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{V(r)}{r^3}$.

解 设 P 为 S 上任一点，则以 P 为中心，r 为半径的球体全都含于 T_r 中，因此

$$V(r) \geqslant \frac{4}{3}\pi r^3$$

设 P 到 S 上其他点的距离的最大值为 d，则 T_r 含于以 P 为中心，以 $r+d$ 为半径的球体中，因此

$$V(r) \leqslant \frac{4}{3}\pi(r+d)^3$$

故 $$\frac{4}{3}\pi\leqslant\frac{V(r)}{r^3}\leqslant\frac{4}{3}\pi\left(1+\frac{d}{r}\right)^3$$

由于 $$\lim_{r\to\infty}\frac{4}{3}\pi\left(1+\frac{d}{r}\right)^3=\frac{4}{3}\pi$$

故 $$\lim_{r\to\infty}\frac{V(r)}{r^3}=\frac{4}{3}\pi$$

例 20 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots, x_n=\dfrac{a_1}{1+a_1}+\dfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证 因为 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，所以 $\{x_n\}$ 单调增加. 又

$$x_1=\frac{a_1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1}$$

$$x_2=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{(1+a_2)-1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

$$=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

设 $x_{n-1} = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}$

则 $x_n = x_{n-1} + \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} + \frac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} + \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

因此 $x_n<1$，根据单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

例 21 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次}} x$

解 令 $x_n=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{次}} x$

当 $x\geqslant 0$ 时，由

$$x_{n+1} = \sin x_n \leqslant x_n$$

得 $\{x_n\}$ 单调减少．又 $0\leqslant x_n\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant 1$．设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

由 $x_{n+1}=\sin x_n$，两边取极限得

$$A = \sin A, \quad A = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

当 $x<0$ 时，$x_n=-\sin\sin\cdots\sin(-x)$，故同样有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

例 22 设 $a>0$，$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1}$，…，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=x_1$

设 $x_n > x_{n-1}$，则

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$$

故$\{x_n\}$单调增加.

又 $x_1 = \sqrt{a} < 1 + \sqrt{a}$，设 $x_n < 1 + \sqrt{a}$，则有

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + 1 + \sqrt{a}} < \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a}$$

故$\{x_n\}$有上界，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$$

两边取极限得

$$A = \sqrt{a + A}$$

解得 $A = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ $\left(A = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \quad 舍去\right)$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

注 本题$\{x_n\}$的单调性容易证明，但上界不易估计. 不妨假设$\{x_n\}$有极限 A，求得 $A = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$，将 A 适当放大到

$$A < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a + 4\sqrt{a}}}{2} = 1 + \sqrt{a}$$

则 $1 + \sqrt{a}$ 是$\{x_n\}$的形式较简单的上界.

例 23 设 $F(x, y) = \dfrac{f(y - x)}{2x}$，$F(1, y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$，$x_0 > 0$，$x_1 = F(x_0, 2x_0)$，…，$x_{n+1} = F(x_n, 2x_n)$，$n = 1, 2, \cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限值.

证 令 $x = 1$，$\dfrac{f(y - 1)}{2} = F(1, y) = \dfrac{y^2}{2} - y + 5$

$f(y - 1) = y^2 - 2y + 10 = (y - 1)^2 + 9$

$f(y - x) = (y - x)^2 + 9$

$$F(x,y)=\frac{(y-x)^2+9}{2x}$$

$$x_1=\frac{(2x_0-x_0)^2+9}{2x_0}=\frac{x_0^2+9}{2x_0},\cdots$$

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+9}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{9}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{9}{x_n}}=3$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{3^2}\right)=1$$

即$\{x_n\}$单调减少并有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+9}{2x_n}$$

两边取极限得

$$A=\frac{A^2+9}{2A}$$

解得 $A=3$($A=-3$ 舍去)，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 24 设 $a>0$，$x_1>0$，定义 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$，$n=1$，2，…. 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解
$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$$
$$\geqslant\sqrt[4]{x_nx_nx_n\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$$

即$\{x_n\}$有下界，又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{x_n^4}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{a}\right)=1$$

故 $x_{n+1}\leqslant x_n$，即$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$，两边取极限得

$$A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)$$

解得 $A=\sqrt[4]{a}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$．

注 一般地，若 $a>0$，$x_1>0$，

$$x_{n+1}=\frac{1}{m}\left[(m-1)x_n+\frac{a}{x_n^{m-1}}\right]\quad (m\text{ 是正整数})$$

可以推出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a}$．

例 25 设 $x_1=1$，$x_2=1+\frac{1}{x_1}$，…，$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$，$n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值.

解 1 $x_1=1$，$x_2=1+\frac{1}{1}=2$，设 $1\leqslant x_n\leqslant 2$，则由 $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$ 有 $1\leqslant x_n\leqslant 2$，即$\{x_n\}$有界.

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=\frac{3}{2},\quad x_4=\frac{5}{3}$$

$$x_1<x_3,\quad x_2>x_4$$

设 $x_{2n-1}<x_{2n+1}$，则有

$$x_{2n}=1+\frac{1}{x_{2n-1}}>1+\frac{1}{x_{2n+1}}=x_{2n+2}$$

$$x_{2n+1}=1+\frac{1}{x_{2n}}<1+\frac{1}{x_{2n+2}}=x_{2n+3}$$

即$\{x_{2n-1}\}$单调增加，$\{x_{2n}\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$与$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$都存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B$

由 $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$两边取极限得

$$A=1+\frac{1}{B},\quad B=1+\frac{1}{A}$$

解得 $$A=B=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解 2 先假定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并设$\lim x_n=A$，由

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}$$

令 $n\to\infty$ 得 $$A=1+\frac{1}{A}$$

解得 $$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

令 $$y_n=x_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

若能证得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则可以证得确实有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

由已知条件显然有 $x_n\geqslant 1$，由于

$$\begin{aligned}|y_{n+1}|&=\left|x_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\\&=\left|1+\frac{1}{x_n}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{1}{x_n}\left|1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x_n\right|\\&=\frac{1}{x_n}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left|x_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{1}{x_n}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}|y_n|\\&\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}|y_n|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n|y_1|\end{aligned}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$．故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

例 26 设 $a>b>0$，作数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=\frac{2ab}{a+b}$，…，$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$n=1,2,\cdots$，求此二数列的极限.

解 $$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n+b_n}{2}\Big/\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\frac{(a_n+b_n)^2}{4a_nb_n}$$

$$= \frac{a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n}{4a_nb_n} \geqslant \frac{2a_nb_n + 2a_nb_n}{4a_nb_n} = 1$$

故 $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.

$$a_1 = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$$

$$b_1 = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{a_1} > b$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{a_nb_n}{a_{n+1}} \geqslant b_n$$

因此有

$$b < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant a_2 \leqslant a_1 < a$$

即$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是单调有界数列，故都有极限.

设
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

由
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

令 $n\to\infty$ 得 $A=\frac{A+B}{2}$，故 $A=B$. 又由已知条件有

$$a_1b_1 = ab, \quad a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1}, \quad n = 2,3,\cdots$$

有 $a_nb_n=ab$. 令 $n\to\infty$得

$$A^2 = ab, \quad A = \sqrt{ab}$$

故
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$$

例 27 设 $x_0=7$，$x_1=3$，$3x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$ ($n\geqslant2$)，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由
$$3x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

有
$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2}$$

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2(x_{n-2} - x_{n-3})$$

$$= \cdots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(x_1 - x_0) = -4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0 \\
&= -4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \cdots - 4\left(-\frac{1}{3}\right) - 4 + x_0 \\
&= -4\,\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}} + 7 = -3\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] + 7
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[-3\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 7\right] = -3 + 7 = 4
$$

例 28 设 $a_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$a_n=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_{n-1}}$ $(n=2, 3, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n$.

解 设 $\theta=\frac{\pi}{2}$，由于

$$
a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\theta}{2}
$$

$$
a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_1} = \sqrt{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)/2} = \cos\frac{\theta}{2^2}
$$

设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2^n}$，则有

$$
a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n} = \sqrt{\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)/2} = \cos\frac{\theta}{2^{n+1}}
$$

故 $\qquad a_n=\cos\frac{\theta}{2^n}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n &= \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\cdot\frac{\theta}{2^n}} \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

例 29 记 $a_1=3$，$a_n=2a_{n-1}^2-1$ $(n\geqslant 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$.

解 $a_1=3>1$，设 $a_{n-1}>1$，则

$$a_n = 2a_{n-1}^2 - 1 > 1$$

$$a_n^2 - 1 = (a_n + 1)(a_n - 1)$$

$$=(2a_{n-1}^2 - 1 + 1)(2a_{n-1}^2 - 1 - 1)$$

$$=2^2a_{n-1}^2(a_{n-1}^2 - 1) = 2^4a_{n-1}^2a_{n-2}^2(a_{n-2}^2 - 1)$$

$$=\cdots = 2^{2(n-1)}a_{n-1}^2a_{n-2}^2\cdots a_1^2(a_1^2 - 1)$$

$$=2^{2n+1}a_{n-1}^2a_{n-2}^2\cdots a_1^2 = 2(2^n a_1a_2\cdots a_{n-1})^2$$

故有 $$\frac{a_n^2 - 1}{(2^n a_1a_2\cdots a_n)^2} = 2$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n a_1a_2\cdots a_n} = 0$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{(2^n a_1a_2\cdots a_{n-1})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2 - 1}{(2^n a_1a_2\cdots a_{n-1})^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2^n a_1a_2\cdots a_{n-1})^2} = 2$$

得 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}} = \sqrt{2}$$

例 30 已知 $f(x)$是三次多项式，且有

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a} = 1 \quad (a \neq 0)$$

求$\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解 根据题意有

$$f(x) = (Ax + B)(x - 2a)(x - 4a)$$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x\to 2a}(Ax + B)(x - 4a)$$

$$= (2aA + B)(-2a) = 1$$

得 $$2aA+B=-\frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}(Ax+B)(x-2a)$$

$$=(4aA+B)\cdot 2a=1$$

得 $4aA+B=\dfrac{1}{2a}$

解得 $A=\dfrac{1}{2a^2}$，$B=-\dfrac{3}{2a}$

$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}\frac{\frac{1}{2a^2}(x-3a)(x-2a)(x-4a)}{x-3a}$$

$$=\lim_{x\to 3a}\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

例 31 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$ 确定，求

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}\text{ 和 }\lim_{x\to+\infty}(y-kx)$$

解 由已知方程得，当 $x\to+\infty$ 时，$y\to-\infty$，且

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3=3axy$$

$$y+x=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}$$

$$\frac{y}{x}=-1+\frac{3ay}{x^2-xy+y^2}$$

$$=-1+\frac{6ay}{(x-y)^2+x^2+y^2}$$

故 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}(y+x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3a\frac{y}{x}\Big/\left[1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$

$$=\frac{3a(-1)}{1-(-1)+(-1)^2}=-a$$

例 32 一点先向正东移动 a，然后左拐弯移动 $aq(0<q<1)$，如此不断重复左拐弯，使得后一段移动距离为前一段的 q 倍，这样该点有一极限位置，问该极限位置与原出发点相距多少？

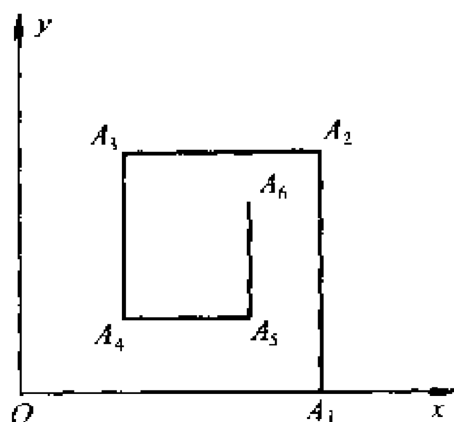


图 1

解 如图 1，设出发点为原点，第 n 次移动后所在点坐标为 $A_n(x_n,y_n)$，则有

$$A_1(a,0),\quad A_2(a,aq),$$
$$A_3(a-aq^2,aq),\quad A_4(a-aq^2,aq-aq^3),$$
$$A_5(a-aq^2+aq^4,aq-aq^3)$$
$$A_6(a-aq^2+aq^4,aq-aq^3+aq^5)$$
$$A_7(a-aq^2+aq^4-aq^6,aq-aq^3+aq^5)$$
$$\cdots\cdots$$

x_n，y_n 均是以 $-q^2$ 为公比的等比数列的前若干项的和，故

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\left(\frac{a}{1+q^2},\frac{aq}{1+q^2}\right)\xlongequal{\text{def}}A$$

$$OA=\sqrt{\left(\frac{a}{1+q^2}\right)^2+\left(\frac{aq}{1+q^2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{1+q^2}}$$

例 33 考虑函数

$$f(x,n)=\frac{C_n^0+C_n^2x+C_n^4x^2+\cdots}{C_n^1+C_n^3x+C_n^5x^2+\cdots}$$

式中 n 为正整数，试用含 $f(x,n)$ 与 x 的有理式来表示 $f(x,n+1)$，并对固定的实数值 x 求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x,n)$.

解 由于 $C_{n+1}^r=C_n^r+C_n^{r-1}$，故

$$f(x,n+1)=\frac{C_{n+1}^0+C_{n+1}^2x+C_{n+1}^4x^2+\cdots}{C_{n+1}^1+C_{n+1}^3x+C_{n+1}^5x^2+\cdots}$$

$$=\frac{C_n^0+(C_n^2+C_n^1)x+(C_n^4+C_n^3)x^2+\cdots}{C_n^1+C_n^0+(C_n^3+C_n^2)x+(C_n^5+C_n^4)x^2+\cdots}$$

$$=\frac{(C_n^0+C_n^2x+C_n^4x^2+\cdots)+x(C_n^1+C_n^3x+C_n^5x^2+\cdots)}{(C_n^0+C_n^2x+C_n^4x^2+\cdots)+(C_n^1+C_n^3x+C_n^5x^2+\cdots)}$$

$$=\frac{\dfrac{C_n^0+C_n^2x+C_n^4x^2+\cdots}{C_n^1+C_n^3x+C_n^5x^2+\cdots}+x}{\dfrac{C_n^0+C_n^2x+C_n^4x^2+\cdots}{C_n^1+C_n^3x+C_n^5x^2+\cdots}+1}$$

$$=\frac{f(x,n)+x}{f(x,n)+1}$$

当 $x=0$，$f(x,n)=\dfrac{C_n^0}{C_n^1}=\dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}f(x,n)=0$$

当 $x\neq0, f(x,n)=\sqrt{x}\dfrac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{(1+\sqrt{x})^n-(1-\sqrt{x})^n}$

若 $x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x,n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x}\dfrac{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^n}=\sqrt{x}$

若 $x<0$，令 $1+\sqrt{x}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$1-\sqrt{x}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x,n)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x}\frac{r^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n+r^n(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n}{r^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n-r^n(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x}\frac{(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)+(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)}{(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)-(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-\mathrm{i})\sqrt{x}\cot n\theta$$

该极限不存在.

例 34 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，求 $f(x)$的定义域.

解 当 $x>1$，

$$\frac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}} > \frac{\ln x^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\ln x$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln x=+\infty$，故 $f(x)$不存在.

当$-1<x\leqslant 1$，

由于 $\ln(e^x+x^n)$是有界函数，而$\frac{1}{\sqrt{n}}$是无穷小，故

$$f(x)=0$$

当 $x\leqslant -1$，当 n 充分大时会有 $e^x+x^n<0$，故 $f(x)$没有定义.

因此 $f(x)$的定义域为$(-1,1]$.

例 35 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}=A\neq 0$，求 c 及 k，使 $f(x)\simeq cx^k$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}$存在，且分母是无穷小，故

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$$

由 $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{f(x)}{\sin x}}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^3}$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2Ax^3}=1$

故 $c=2A,\quad k=3$

例 36 若 $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$，试求 c 与 k，使当 $x\to+\infty$时，$f(x)\simeq\frac{c}{x^k}$.

解

$$f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$
$$=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$
$$=-\frac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$
$$=-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}}=1$$

因此 $$c=-\frac{1}{4},\quad k=\frac{3}{2}$$

例 37 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)} & x\neq 1,\ -2\\ 2 & x=1\end{cases}$

在 $x=1$ 处连续，试求 a，b 的值.

解 由题意

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=f(1)=2$$

又当 $x\to1$ 时，分母是无穷小，故

$$\lim_{x\to1}(x^4+ax+b)=0$$

即 $$1+a+b=0,\ a=-b-1$$

故 $$\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^4+(-b-1)x+b}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^4-x)-b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-b}{x+2}=\frac{3-b}{3}=2$$

解得　$b=-3$，$a=-(-3)-1=2$

例 38　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续，对任意正数 x，有 $f(x^2)=f(x)$，且 $f(3)=5$，求 $f(x)$.

解　对 $\forall\ x>0$，由题设有

$$f(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=f\left(x^{\frac{1}{4}}\right)=\cdots=f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)=f(1)$$

即 $f(x)\equiv f(1)$，因此

$$f(x)=f(3)=5\qquad x\in(0,+\infty)$$

例 39　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，试证：对一切 x 满足 $f(2x)=f(x)e^x$ 的充分必要条件是 $f(x)=f(0)e^x$.

证　充分性：设 $f(x)=f(0)e^x$，则

$$f(2x)=f(0)e^{2x}=f(0)e^xe^x=f(x)e^x$$

必要性：设 $f(2x)=f(x)e^x$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}=f\left(\frac{x}{4}\right)e^{\frac{x}{4}}e^{\frac{x}{2}}\\&=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)x}\\&=f\left(\frac{x}{2^n}\right)e^{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}x}\\&=f\left(\frac{x}{2^n}\right)e^{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)x}\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)e^{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)x}=f(0)e^x$$

例 40　设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有定义，且 $e^xf(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 上都是单调增函数，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

证　设 $x_0\in(0,1)$，对 $\forall\ x\in(x_0,1)$，由于 $e^xf(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 是单调增函数，故有

$$e^{x_0}f(x_0) \leqslant e^{x}f(x), \quad e^{-f(x_0)} \leqslant e^{-f(x)}$$

因此得 $$e^{x_0-x}f(x_0) \leqslant f(x), \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

即 $$e^{x_0-x}f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$$

由于 $$\lim_{x\to x_0^+} e^{x_0-x}f(x_0) = f(x_0)$$

故 $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

同理，对$\forall\ x\in(0,x_0)$，有

$$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant e^{x_0-x}f(x_0)$$

由此可得

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

因此 $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

即 $f(x)$在点 x_0 处连续，由 x_0 的任意性，$f(x)$在$(0,1)$上连续.

例 41 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}} & x<0\\[2mm] \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1} & x>1\end{cases}$

试将 $f(x)$的定义域扩充到$(-\infty,+\infty)$，使 $f(x)$处处连续且在$(0,1)$上的图形是以 $x=\dfrac{1}{3}$ 为对称轴的抛物线.

解 由题意，在$[0,1]$上有

$$f(x) = a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + b$$

因为 $f(x)$在 $x=0$ 连续，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{9}a - b$$

故有 $$\frac{1}{9}a + b = 1$$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1) = \frac{4}{9}a + b$$

故有
$$\frac{4}{9}a+b=2$$

解得 $a=3, b=\frac{2}{3}$，故

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}} & x<0\\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1} & x>1\end{cases}$$

例 42 已知函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x^n}=0$，试证：

(1)若 n 为奇数，则存在实数 ξ，使 $\xi^n+\varphi(\xi)=0$；

(2) 若 n 为偶数，则存在实数 η，使对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $\eta^n+\varphi(\eta)\leqslant x^n+\varphi(x)$。

证 令 $f(x)=x^n+\varphi(x)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

(1) 当 n 为奇数，由已知条件，有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n\left(1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n\left(1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right)=-\infty$$

故∃ $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^n+\varphi(\xi)=0$$

(2) 当 n 为偶数，由已知条件，有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n\left(1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right)=+\infty$$

故对 $M=|f(0)|+1>0$,存在 $N>0$,当 $|x|>N$ 时,总有

$$f(x)>M>f(0)$$

因为 $f(x)$ 在 $[-N,N]$ 上连续,故在 $[-N,N]$ 上 $f(x)$ 取得最小值,即 $\exists\ \eta\in[-N,N]$,使对一切 $x\in[-N,N]$,有

$$f(\eta)\leqslant f(x)$$

由于 $f(\eta)\leqslant f(0)$,故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f(\eta)\leqslant f(x)$$

即
$$\eta^n+\varphi(\eta)\leqslant x^n+\varphi(x)$$

例 43 设 n 为自然数,函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续,$f(0)=f(n)$,试证存在 a,$a+1\in[0,n]$,使 $f(a)=f(a+1)$.

证 当 $n=1$,由题设,结论成立($a=0$ 即可).

当 $n>1$,令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$,则 $g(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上连续,故存在最小值 m 与最大值 M,由于

$$m\leqslant\frac{1}{n}[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)]\leqslant M$$

由介值定理,存在 $a\in[0,n-1]$(此时 $a,a+1\in[0,n]$),使得

$$g(a)=\frac{1}{n}[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)]$$

$$=\frac{1}{n}[f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\cdots+f(n)-f(n-1)]$$

$$=\frac{1}{n}[f(n)-f(0)]=0$$

即
$$f(a+1)-f(a)=0$$
$$f(a)=f(a+1)$$

例 44 假如地球表面的气温是时间与地点的连续函数,证明在任何时刻,地球赤道上必存在以球心为对称中心的一对点,在这对点上气温相等.

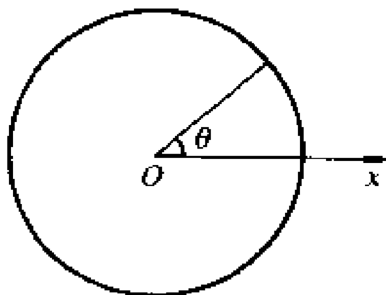


图 2

证 如图 2 建立坐标系,其中圆心是赤道中心,设圆上角 θ 处气温为

$$T = T(\theta) \qquad [0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi]$$

下面证明：存在 $\xi \in [0,\pi]$，使

$$T(\xi) = T(\pi + \xi)$$

令 $F(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$

则 $F(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续．由于

$$F(0) = T(0) - T(\pi)$$

$$F(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - F(0)$$

$$F(0)F(\pi) \leqslant 0$$

故存在 $\xi \in [0,\pi]$，使 $F(\xi) = 0$，即

$$T(\xi) - T(\xi + \pi) = 0$$

$$T(\xi) = T(\pi + \xi)$$

问题得证．

例 45 将四条腿一样长的椅子放在地面上，假定地面是光滑曲面，且椅子四条腿着地点为一正方形的四个顶点，证明：若将此正方形中心保持不动，总可以通过转动椅子使四条腿同时着地．

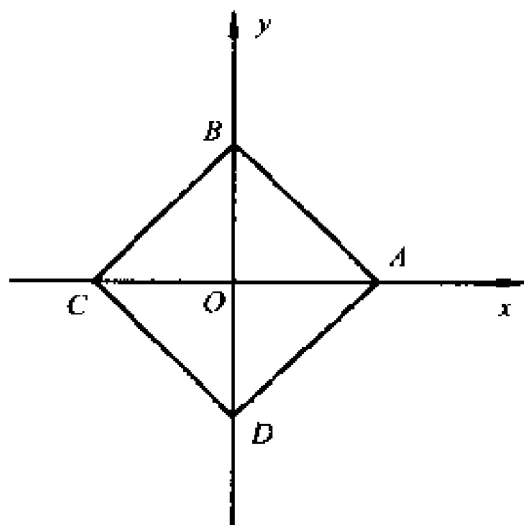


图 3

证 如图 3 建立坐标系，其中 A、B、C、D 四点表示四条腿的着地点．设正方形转动 θ 角后 A、C 两点与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两点与地面距离之和为 $g(\theta)$．因为地面是光滑的，故 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 都是连续函数，又因为椅子在任何位置都总有三只脚同时着地，故对任意 θ，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 至少有一个为零．因此总有

$$f(\theta)g(\theta) = 0$$

令

$$F(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$$

则 $F(\theta)$是连续函数，由于

$$F(0)=f(0)-g(0)$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)-f(0)$$

$$F(0)F\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 0$$

由介值定理，$\exists\ \xi\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，使

$$F(\xi)=0$$

即 $$f(\xi)=g(\xi)$$

又由于 $$f(\xi)g(\xi)=0$$

故 $$f(\xi)=g(\xi)=0$$

此时四条腿同时着地.

第二章　一元函数微分学

一、内容要点

本章内容包括一元函数的导数、微分的概念与计算，微分中值定理、泰勒公式及其应用，如求未定式的极限，研究函数的增减性、凹凸性、极值、方程的根、证明不等式……

泰勒公式的一些应用：

1. 计算函数的近似值.
2. 证明等式.
3. 证明不等式.
4. 判断无穷小的阶.
5. 判断极值.
6. 求极限.

证明不等式的一些方法：

1. 利用微分中值定理.
2. 利用函数的单调性.
3. 利用曲线的凹凸性.
4. 利用函数的极值.
5. 利用泰勒公式.

判断方程 $f(x)=0$ 的根的个数，可先求出 $f(x)$ 的所有单调区间，然后考察每个区间的端点处的函数值(或极限值)的符号，并利用连续函数的介值定理，即可得知根的个数.

二、例题选讲

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对任意 x 都有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$，试判断在

$x=0$处 $f(x)$是否可导.

解 当$-1\leqslant x<0$时，有 $0\leqslant x+1<1$

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)(1-(x+1)^2)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2)$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2)}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)}{x}=1$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故 $f(x)$在 $x=0$ 不可导.

例 2 设 $f(x)$,$g(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数,且满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)g(x_2)+f(x_2)g(x_1)$,$f(0)=0$,$g(0)=1$,$f'(0)=1$,$g'(0)=0$,试证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且 $f'(x)=g(x)$.

证 对$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(g(\Delta x)-1)+g(x)(f(\Delta x)-0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)$$

$$=g(x)$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导函数，且 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(2) 求 $f'(x)$；

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}+\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

$$=\varphi'(0)$$

故当 $a=\varphi'(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2} \qquad \text{(利用洛必达法则)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+\frac{\sin x}{2x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\varphi''(0)+\frac{1}{2}$$

(3)由于

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\varphi'(x)-\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\varphi''(x)+x\cos x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\varphi''(0)+\frac{1}{2}=f''(0)$$

故 $f''(x)$在 $x=0$ 处是连续的.

例 4 设 $f(x)$在点 $x=0$ 可导,且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,证明 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 点可导的充分必要条件.

证 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}$$

$$=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}$$

$$F'_{\pm}(0)=f'(0)+\lim_{x\to 0^{\pm}}f(x)\frac{|\sin x|}{x}$$

$$=f'(0)\pm f(0)$$

由于 $F'(0)$存在的充分必要条件是 $F'_{+}(0)$,$F'_{-}(0)$ 都存在且相等,故 $F'(0)$存在的充分必要条件是 $f(0)=0$.

例 5 设 $y=\sin^5 x$,求 $y^{(n)}$.

解 $y=\sin^5 x=\sin x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(\sin x-2\sin x\cos 2x+\sin x\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin x-\sin 3x-\sin(-x)+\sin x\,\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{8}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{16}(\sin 5x+\sin(-3x))$$

$$=\frac{5}{8}\sin x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{1}{16}\sin 5x$$

$$y^{(n)}=\frac{5}{8}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{5\times 3^n}{16}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{5^n}{16}\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

例 6　设 $f(x)=\dfrac{x^n}{x^2-1}$　$(n=1,2,\cdots)$，求 $f^{(n)}(x)$.

解　当 $n=2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$

$$f(x)=\frac{x^{2k+1}-x^{2k-1}+x^{2k-1}-x^{2k-3}+\cdots+x^3-x+x}{x^2-1}$$

$$=x^{2k-1}+x^{2k-3}+\cdots+x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$f^{(n)}(x)=-\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

当 $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$

$$f(x)=\frac{x^{2k}-x^{2k-2}+x^{2k-2}-x^{2k-4}+\cdots+x^2-1+1}{x^2-1}$$

$$=x^{2k-2}+x^{2k-4}+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

例 7　设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}$.

解　由 $y=\arctan x$，有 $x=\tan y$，故

$$\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y$$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\frac{1}{2}(1+\cos 2y)$$

$$y''=\frac{1}{2}\times 2\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)y'=\cos^2 y\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1+\cos 2y}{2}\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(4y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\frac{1}{2}\times 2\cos\left(2y+\frac{2\pi}{2}\right)y'+\frac{1}{4}\times 4\cos\left(4y+\frac{2\pi}{2}\right)y'$$

$$=2\cos(3y+\pi)\cos y\cdot y'=2\cos^3 y\cos(3y+\pi)$$

设　$y^{(n-1)}=(n-2)!\ \cos^{n-1}y\cos\left((n-1)y+\dfrac{(n-2)\pi}{2}\right)$

可以求得

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cos\left(ny+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

例 8 设 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(100)}$及 $y^{(100)}(0)$.

解 $y=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$y^{(100)}=2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-99\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-100}\cdot$$

$$(-1)^{100}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-99\right)\cdot$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}-100}(-1)^{100}$$

$$=\frac{2\times199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}+\frac{197!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{\frac{201}{2}}}$$

$$y^{(100)}(0)=\frac{197!!\times399}{2^{100}}$$

例 9 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解 原式变为 $y\sqrt{1-x^2}=\arcsin x$, $y(0)=0$,求导得

$$y'\sqrt{1-x^2}+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)y'-xy-1=0,\text{得 } y'(0)=1$$

继续求导得

$$(1-x^2)y''-3xy'-y=0,\ y''(0)=0$$

$$(1-x^2)y'''-5xy''-4y'=0,\ y'''(0)=4$$

$$(1-x^2)y^{(4)}-7xy'''-9y''=0,\ y^{(4)}(0)=0$$

……

设 $$(1-x^2)y^{(n)}-(2n-1)xy^{(n-1)}-(n-1)^2y^{(n-2)}=0$$

求导可得

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0$$

因此当 n 为偶数，$y^{(n)}(0)=0$；当 n 为奇数，$y^{(n)}(0)=[(n-1)!!]^2$ $(n\geqslant 3)$.

例 10 试证$\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\arctan x]$

证 $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}}-\dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\right)^{(n)}$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\left((x+\mathrm{i})^{n+1}-(x-\mathrm{i})^{n+1}\right)$$

令 $x+\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $x-\mathrm{i}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{x^2+1}$，$\theta=\arctan x$，于是

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}(x^2+1)^{n+1}}[r^{n+1}(\cos(n+1)\theta+\mathrm{i}\sin(n+1)\theta)-$$

$$r^{n+1}(\cos(n+1)\theta-\mathrm{i}\sin(n+1)\theta)]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}(x^2+1)^{n+1}}(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}2\mathrm{i}\sin(n+1)\theta$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\arctan x]$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，试证：至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

证 令 $x=\tan t$，

$$F(t)=\begin{cases}f(\tan t) & t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\\ A & t=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

则由 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}F(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$$\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}^-} F(t)=\lim_{x\to -\infty} f(x)=A$$

得 $F(t)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 连续，又 $F(t)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$，根据洛尔定理，存在 $\eta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使

$$F'(\eta)=0$$

即
$$f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$$

由于 $\sec^2\eta\neq 0$，故 $f'(\tan\eta)=0$，令 $\xi=\tan\eta$，则

$$f'(\xi)=0$$

例 12 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，其中 $a>0$，$f(a)=0$，证明在 (a,b) 内必有一点 ξ 使

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$$

证 令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且

$$F(a)=F(b)=0$$

故 $\exists\ \xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0$$

由于 $a\neq 0$，$b-\xi\neq 0$，故有

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$$

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证 令 $F(x)=e^{x^2/2}f(x)$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且

$$F(a)=F(b)=0$$

由洛尔定理，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi e^{\xi^2/2}f(\xi)+e^{\xi^2/2}f'(\xi)=0$$

由于 $e^{\xi^2/2}\neq 0$，故有

$$\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

例 14 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导,且 $f(a)=f(b)$,$g(a)=g(b)$,试证存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi) \end{vmatrix} = 2f'(\xi)g'(\xi)$$

证 令 $F(x)=f'(x)(g(b)-g(x))-g'(x)(f(x)-f(a))$

则$F(x)$在$[a,b]$可导,且

$$F(a) = F(b) = 0$$

由洛尔定理,$\exists\ \xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$$f''(\xi)(g(b)-g(\xi)) - g''(\xi)(f(\xi)-f(a)) - 2f'(\xi)g'(\xi) = 0$$

故有

$$\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi) \end{vmatrix} = 2f'(\xi)g'(\xi)$$

例 15 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可导,且对(a,b)内一切 x,有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$,证明:若 $f(x)$在(a,b)内有两个零点 x_1,x_2,则在 x_1 与 x_2 之间必存在一点 ξ,使 $g(\xi)=0$.

证 由 $f(x_1)=f(x_2)$及 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$

有 $g(x_1)\neq 0$, $g(x_2)\neq 0$

若对于 x_1,x_2 之间的任意 x 都有 $g(x)\neq 0$,不妨设 $x_1<x_2$,令

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

则 $F(x)$在$[x_1,x_2]$可导,且

$$F(x_1) = F(x_2) = 0$$

由洛尔定理,$\exists\ c\in(x_1,x_2)$使 $F'(c)=0$,即

$$\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0$$

故 $f'(c)g(c)-f(c)g'(c)=0$

与已知条件矛盾,故在 x_1,x_2 之间必有一点 ξ,使

$$g(\xi) = 0$$

例 16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a>0)$，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

证 由拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(a+b)$$

由柯西中值定理，$\exists\ \eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

故
$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

例 17 设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，$ab>0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ \varphi(a) & \varphi(b) \end{vmatrix}=\varphi(\xi)-a\varphi'(\xi)$$

证 令 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\dfrac{\varphi(b)}{b}-\dfrac{\varphi(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\dfrac{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

即
$$\frac{1}{a-b}(a\varphi(b)-b\varphi(a))=\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)$$

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ \varphi(a) & \varphi(b) \end{vmatrix}=\varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi)$$

例 18 设 $f(x)$ 满足在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)>0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

证 由于 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

故存在较小的 $\delta>0$,使当 $a<x<a+\delta<b$ 时

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

由于 $f(a)=0$,故 $f(x)>0$,取 $c\in(a,a+\delta)$,由拉格朗日中值定理,$\exists\ \xi_1\in(a,c)$,$\xi_2\in(c,b)$,使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=-\frac{f(c)}{b-c}<0$$

故$\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$$

例 19 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为 n 个不同的实数,函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$上有 n 阶导数,并满足

$$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$$

则对任意 $c\in[a_1,a_n]$, 都相应地存在 $\xi\in(a_1,a_n)$, 满足等式

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

证 令 $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

当 $c=a_i(i=1,2,\cdots,n)$,由题意 $f(c)=0$,又 $g(c)=0$,故 (a_1,a_n)中任一点都可以取作 ξ,使

$$f(c)=\frac{g(c)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

当 $c\neq a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 令

$$F(x)=f(x)g(c)-f(c)g(x)$$

则 $F(a_1)=F(a_2)=\cdots=F(a_n)=F(c)=0$

故在(a_1,a_n)内存在 n 个不同的点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,使

$$F'(\xi_1)=\cdots=F'(\xi_2)=0$$

又存在 $n-1$ 个不同点 η_1，η_2，…，η_{n-1}，使

$$F''(\eta_1)=\cdots=F''(\eta_{n-1})=0$$

如此下去，$\exists\ \xi\in(a_1,a_n)$使

$$F^{(n)}(\xi)=0$$

即
$$f^{(n)}(\xi)g(c)-f(c)g^{(n)}(\xi)=0$$

$$f^{(n)}(\xi)g(c)-f(c)n!\ =0$$

故
$$f(c)=\frac{g(c)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

$$=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

例 20 设函数 $f(x)$在(a,b)内可导，证明：若 $f(x)$在(a,b)内无界，则 $f'(x)$也在(a,b)内无界.

证 若 $f'(x)$在(a,b)内有界，即$\exists\ M>0$，使对$\forall\ x\in(a,b)$，有$|f'(x)|\leqslant M$. 在(a,b)内取一点 x_0，由拉格朗日中值定理，在 x 与 x_0 之间存在 ξ(当 $x\neq x_0$)使

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\\&\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\\&\leqslant|f'(\xi)||x-x_0|+|f(x_0)|\\&\leqslant M(b-a)+|f(x_0)|\end{aligned}$$

当 $x=x_0$，同样有

$$|f(x_0)|\leqslant M(b-a)+|f(x_0)|$$

即 $f(x)$在(a,b)内有界，与已知矛盾，故 $f'(x)$在(a,b)内无界.

例 21 设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续有界且单调增加，在$(0,+\infty)$内二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证 因为 $f(x)$单调增加，故 $f'(x)\geqslant0$，即 $f'(x)$有下界，又 $f''(x)<0$，故 $f'(x)$单调减少，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$ 存在. 由 $f'(x)\geqslant0$，有 $A\geqslant0$. 若 $A>0$，则$\exists\ N>0$，当 $x>N$ 时，$f'(x)>\dfrac{A}{2}$，则当 $x>N$，根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in(N,x)$，使

$$f(x)=f(x)-f(N)+f(N)$$

$$=f'(\xi)(x-N)+f(N)$$

$$>\frac{A}{2}(x-N)+f(N)$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{A}{2}(x-N)+f(N)\right]=+\infty$$

与 $f(x)$有界矛盾，故 $A=0$，即

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

例 22 设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明在区间$(0,1)$内存在两点 x_1，x_2，使

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$$

证 由于 $f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)=0$，$f(1)=1$，根据介值定理，$\exists\ \xi\in(0,1)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{2}$$

根据拉格朗日中值定理，$\exists\ x_1\in(0,\xi)\subset(0,1)$，$x_2\in(\xi,1)\subset(0,1)$，使

$$f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(x_2)(1-\xi)$$

因此有

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{1}{\frac{f(\xi)}{\xi}}+\frac{1}{\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}}$$

$$=\frac{\xi}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\xi}{1-\frac{1}{2}}=2$$

例 23 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可导，则对介于 $f'(a)$与 $f'(b)$之间的任何实数 μ，必存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f'(\xi)=\mu$(达布定理).

证 首先证当 $f'(a)f'(b)<0$ 时，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$. 不妨设 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$. 由于 $f(x)$在$[a,b]$可导，故在$[a,b]$上连续，因此 $f(x)$在$[a,b]$上取得最大值. 由

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

在 $x=a$ 的某右邻域内有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,\quad 故\quad f(x)>f(a)$$

由
$$f'_-(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

在 $x=b$ 的某左邻域内有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,\quad 故\ f(x)>f(b)$$

因此 $f(x)$的最大值点 $\xi\in(a,b)$，于是有 $f'(\xi)=0$.

下面证对介于 $f'(a)$与 $f'(b)$之间的任意数 μ，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f'(\xi)=\mu$. 若 $\mu=f'(a)$或 $\mu=f'(b)$，则结论成立. 若不然，不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$，令

$$F(x)=\mu x-f(x)$$

则
$$F'(x)=\mu-f'(x)$$
$$F'(a)=\mu-f'(a)>0,\qquad F'(b)=\mu-f'(b)<0$$

由前面所证，$\exists\ \xi\in(a,b)$使 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\mu=0,\quad f'(\xi)=\mu$$

例 24 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

解 令 $y=\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

（利用洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

例 25 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值.

解 由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$$

又根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in(x-1,x)$ 使

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to\infty}f'(x)=e$$

由题设 $$e^{2c}=e$$

故 $$2c=1,\quad c=\frac{1}{2}.$$

例 26 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

解 $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\tan(\tan x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}$$

$$=2$$

例 27 求$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$

解 由于

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$2\pi e n!=2\pi\left(2n!+\frac{n!}{2}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$\sin(2\pi e n!)=\sin\left[2\pi\left(2n!+\frac{n!}{2}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right]=\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

当$n\to\infty$时，$\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\simeq\frac{2\pi}{n+1}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{2\pi}{n+1}=2\pi$

例 28 设x_1，x_2，…为方程$\tan x=x$的全体正根按增序排成的数列，求$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})$.

解 令 $f(x)=\tan x-x$

由于

$$\lim_{x\to\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$$

故在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内方程$f(x)=0$有根，又

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1<0$$

$f(x)$单调，故根惟一.

因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$，故$\lim\limits_{k\to\infty}\tan x_k=+\infty$，因此

$$\lim_{k\to\infty}(x_k-k\pi)=\frac{\pi}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) \\
&=\lim_{n\to\infty}(x_n - n\pi) - \lim_{n\to\infty}(x_{n-1} - (n-1)\pi) + \pi \\
&=\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi = \pi
\end{aligned}
$$

例 29 设函数 $f(x)$ 在点 a 处可微，且 $f(a)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$

$$
=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}f(a)}}
$$

$$
=\mathrm{e}^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]/\frac{1}{n}}
$$

$$
=\mathrm{e}^{f'(a)/f(a)}
$$

注 本题不可以利用取对数，然后用洛必达法则的方法求极限，因为已知条件并未告之在点 a 的邻域内 $f'(x)$ 存在.

例 30 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$

解 设 $f(x)=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$

$$
f'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^x\ln n}{n^x-1}\right)(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}
$$

$$
=\frac{n^x\ln\left(1+\frac{1}{n^x}\right)+\ln(n^x+1)}{x^2(n^x+1)}(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}>0
$$

故 $f(x)$ 单调增加，因此有

$$\frac{n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(n+1)^{-\frac{1}{1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n^n+1)^{-\frac{1}{n}}=\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$

同理，令 $g(x)=(n^x-1)^{-\frac{1}{x}}\quad(x>0)$

$$g'(x)=(n^x-1)^{-\frac{1}{x}}\frac{n^x\ln\left(1-\frac{1}{n^x}\right)-\ln(n^x-1)}{x^2(n^x-1)}<0$$

$g(x)$单调减少，因此有

$$\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n-1)^{-1}=\frac{n}{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}(n^n-1)^{-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{n}{(n^n-1)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]=2$$

例 31 设 $f(x)$有三阶导数，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$，求证 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

证 由于

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x+1-x)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x+1-x)^3$$

$$=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},\xi_1\in(x,x+1)$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(x-1-x)+\frac{f''(x)}{2!}(x-1-x)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(x-1-x)^3$$

$$=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},\ \xi_2\in(x-1,x)$$

两式相减得

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$$

令 $x\to\infty$，则 $\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，取极限得

$$c-c=2\lim_{x\to\infty}f'(x)+\frac{1}{6}(0+0)$$

故 $$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$$

在 $f(x+1)$ 的泰勒公式中令 $x\to\infty$ 取极限得

$$c=c+0+\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{2}+0$$

故 $$\lim_{x\to\infty}f''(x)=0$$

例 32 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}=2$$

可知 $\sin x+xf(x)$ 与 $2x^2$ 是等价无穷小，又

$$\begin{aligned}&\sin x + xf(x)\\&=(x+o(x^2))+x(f(0)+f'(0)x+o(x))\\&=(1+f(0))x+f'(0)x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

故 $\quad 1+f(0)=0,\ f'(0)=2$

得 $\quad f(0)=-1,\ f'(0)=2$

注 若利用洛必达法则得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{2x}$$

是不可以的，因为我们不知道后者是否有极限.

例 33 设函数 $\varphi(x)$可导，且满足 $\varphi(0)=0$，又 $\varphi'(x)$单调减少.

(1) 证明对 $x\in(0,1)$，有 $\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$；

(2) 若 $\varphi(1)\geqslant 0$, $\varphi'(0)\leqslant 1$，任取 $x_0\in(0,1)$，令 $x_n=\varphi(x_{n-1})$，$n=1$，2，…，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出该极限.

证 (1) 当 $x\in(0,1)$，令 $f(x)=\varphi(x)-\varphi'(0)x$，

则 $f'(x)=\varphi'(x)-\varphi'(0)<0$，$f(x)$单调减少

又 $f(0)=0$，故当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$

即 $\quad \varphi(x)<\varphi'(0)x$

当 $x\in(0,1)$，根据拉格朗日中值定理，有

$$\begin{aligned}\varphi(0)&=\varphi(x)+\varphi'(\xi_1)(-x) && \xi_1\in(0,x)\\\varphi(1)&=\varphi(x)+\varphi'(\xi_2)(1-x) && \xi_2\in(x,1)\\&<\varphi(x)+\varphi'(\xi_1)(1-x) && (用到\ \varphi'(x)\downarrow)\end{aligned}$$

故有

$$(1-x)\varphi(0)+x\varphi(1)<(1-x)[\varphi(x)+\varphi'(\xi_1)(-x)]+x[\varphi(x)+\varphi'(\xi_1)(1-x)]$$

即 $\quad \varphi(1)x<\varphi(x)$

(2) 由 $x_{n+1}=\varphi(x_n)<\varphi'(0)x_n\leqslant x_n$

知$\{x_n\}$单调减少，又

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)>\varphi(1)x_n>\cdots>\varphi^{n+1}(1)x_0\geqslant 0$$

知$\{x_n\}$有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A, \quad 则\ A \geqslant 0$$

由 $x_n=\varphi(x_{n-1})$，令 $n\to\infty$得

$$A = \varphi(A)$$

若 $A\in(0,1)$，则有

$$A = \varphi(A) < \varphi'(0)A \leqslant A$$

矛盾，故 $A=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n = 0$$

例 34 （1）设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$ $(0<\theta<1)$，$f''(x)$连续，且 $f''(x)\neq 0$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$；

（2）设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$ $(0<\theta<1)$，$f^{(n+1)}(x)$存在，且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$；

（3）设 $f(x)$在$(x-\delta,x+\delta)$内有 n 阶连续导数，且 $f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n-1)}(x)=0$，$f^{(n)}(x)\neq 0$，当 $0<|h|<\delta$ 时，$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$ $(0<\theta<1)$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

解 （1）由已知条件有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h) \qquad (0<\theta_1<1)$$

与已知等式相减得

$$0 = h(f'(x+\theta h) - f'(x)) - \frac{h^2}{2}f''(x-\theta_1 h)$$

根据拉格朗日中值定理得

$$0 = hf''(x+\theta_2 h)\theta h - \frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h) \qquad (0<\theta_2<1)$$

$$f''(x+\theta_2 h)\theta = \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)$$

令 $h\to 0$ 得

$$f''(x)\lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}f''(x)$$

因为 $f''(x)\neq 0$，故 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

（2）由已知条件有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})$$

与已知等式相减得

$$0=\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)]-\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})$$

根据拉格朗日中值定理，$\exists\ 0<\theta_1<1$，使

$$0=\frac{h^n}{n!}\theta hf^{(n+1)}(x+\theta_1 h)-\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})$$

$$\theta f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}$$

令 $h\to 0$ 得

$$f^{(n+1)}(x)\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)$$

由于 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，故

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

（3）由已知条件有

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{f^{(n)}(x+\theta_1 h)}{n!}h^n\quad(0<\theta_1<1)$$

与已知等式相减得

$$h[f'(x+\theta h)-f'(x)]-\frac{f^{(n)}(x+\theta_1 h)}{n!}h^n=0$$

又由于

$$f'(x+\theta h)=f'(x)+\frac{f^{(n)}(x+\theta_2 h)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\qquad(0<\theta_2<1)$$

故有

$$f^{(n)}(x+\theta_2 h)\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(x+\theta_1 h)}{n}$$

令 $h\to 0$ 得

$$f^{(n)}(x)\lim_{h\to 0}\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(x)}{n}$$

由于 $f^{(n)}(x)\neq 0$，故

$$\lim_{h\to 0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

例 35 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n \quad (n=2,3,\cdots)$

(1) 证明方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一的实根 x_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) $f_n(x)$ 是连续函数，又 $f_n(0)=0$，$f_n(1)=n\geqslant 1$，故 $\exists\ x_n\in(0,1]\subset[0,+\infty)$，使

$$f_n(x_n)=1$$

又 $\qquad f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$

$f_n(x)$ 是单调(严格)增函数，故使 $f_n(x_n)=1$ 的根惟一.

(2) 由于 $x_n\in(0,1]$，故 $\{x_n\}$ 有界，又由于

$f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})$，即 $f_n(x_n)-f_{n+1}(x_{n+1})=0$

即 $\quad (x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n)-(x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1})=0$

有 $\quad (x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n)-(x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n)=x_{n+1}^{n+1}>0$

即 $\quad (x_n-x_{n+1})[1+(x_n+x_{n+1})+\cdots+(x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}^{n-1})]>0$

故 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调减少，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由

$$f_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$$

及 $0<x_n<1\ (n>2)$，令 $n\to\infty$ 得

$$\frac{A}{1-A}=1$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

例 36 设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^nx$，求证：

(1) 对于任意自然数 n，方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有一根；

(2) 设 $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

证 (1) $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$

$f_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 连续，$f_n(0)=1$，$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，根据介值定理，$\exists\ x_n\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，使 $f(x_n)=\frac{1}{2}$.

又由于

$$f_n'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$f_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 严格单调减少，故根 x_n 惟一.

(2) 因为

$$f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\left(1-\cos\left(\arccos\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$

故 $\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，$f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2}$，由于 $f_n(x)$ 单调减，故有

$$\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$$

例 37 函数 $f(x)=2^x-1-x^2$ 在实轴上有多少个零点.

解 $f'(x)=2^x\ln2-2x$

$f''(x)=2^x\ln^2 2-2$

由于 $f''(x)=0$ 只有一个根，故 $f(x)=0$ 最多有三个不同实根. 显然

$$f(0)=0,\ f(1)=0$$

由于 $f'(1)=2\ln2-2<0$，且 $f'(x)$是连续函数，故在 $x=1$ 某邻域内 $f'(x)<0$，$f(x)$单调减少，故在 $x=1$ 的右邻域内 $f(x)<0$，又

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2^x\left(1-\frac{1}{2^x}-\frac{x^2}{2^x}\right)=+\infty$$

根据介值定理，$\exists\ x_0\in(1,+\infty)$，使

$$f(x_0)=0$$

故 $f(x)$恰有三个实根.

例 38 确定函数 $f(x)=2e^{2-x^2}(x^6-3x^4+5x^2-1)-2e-5$ 的实零点数目.

解 令 $t=x^2$，则 $t\geqslant0$，

$$f(x)=2e^{2-t}(t^3-3t^2+5t-1)-2e-5\xlongequal{\text{def}}g(t)$$

$$g'(t)=-2e^{2-t}(t-1)(t-2)(t-3)$$

令 $g'(t)=0$，得 $t=1,\ 2,\ 3$，

$$g(1)=2e-5>0,\quad g(2)=5-2e<0$$

$$g(3)=\frac{28}{e}-2e-5<0$$

又 $g(0)=-2e^2-2e-5<0$

$$\lim_{t\to+\infty}g(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2(t^3-3t^2+5t-1)}{e^{t-2}}-2e-5\right]$$

$$=-2e-5<0$$

故 $g(t)=0$ 在 $(0,1)$，$(1,2)$ 上各有一根，因此 $f(x)$ 有 4 个实零点，它们分别位于 $(-\sqrt{2},-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$ 及 $(1,\sqrt{2})$ 内.

例 39 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解. 求 k 的取值范围.

解 设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$

$$f'(x)=k-\frac{2}{x^3},\quad f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$$

当 $k\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，又

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\quad (k<0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1\qquad (k=0)$$

故 $f(x)$ 此时只有一个零点.

当 $k>0$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 由于 $f''(x)>0$，$x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 是极小点，而极小值为

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1$$

当极小值为零时，即当

$$k^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0$$

时，有 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$，此时方程有且仅有一个根；当 $k\neq\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程无根或有两个根.

因此，k 的取值范围为 $k\leqslant 0$ 及 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

例 40 证明 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ 至多有一个实根.

证 设 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

$$g(x)=e^{-x}f(x)$$

当 n 为偶数时，

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\leqslant 0$$

且等号仅在 $x=0$ 成立．故 $g(x)$严格单调减少．

当 $x\neq 0$，$f(x)=x^n\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

故 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$

因此恒有 $g(x)>0$，即 $g(x)=0$ 无实根，故 $f(x)=0$ 无实根．

当 n 为奇数，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

故 $f(x)=0$ 有实根，以下证根惟一．若$\exists\ x_1$，$x_2(x_1<x_2)$，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$，根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使

$$f'(\xi)=0$$

但 $$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n-1$ 是偶数，故 $f'(x)=0$ 无实根，矛盾，因此 $f(x)=0$ 只有一根．

合起来，方程至多有一个实根．

例 41 若 a 是一个正常数，证明方程 $ae^x=1+x+\frac{x^2}{2}$ 恰有一个实根．

证 设 $f(x)=ae^x-1-x-\frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

故 $f(x)=0$ 有实根，下面证根是惟一的．

当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)=ae^x-1-x$

$$f''(x)=ae^x-1$$

由 $f''(x)=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a}$．又 $f'''(x)=ae^x>0$，故

$$f'\left(\ln\frac{1}{a}\right)=-\ln\frac{1}{a}$$

是 $f'(x)$的极小值也是最小值，又 $-\ln\frac{1}{a}=\ln a\geqslant 0$，故 $f'(x)\geqslant 0$（等号仅在个别点成立）．故 $f(x)$单调增加，因此 $f(x)=0$ 的根惟一．

当 $0<a<1$，在 x 与 0 之间存在 ξ 使

$$f(x)=a\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^{\xi}}{3!}x^3\right)-1-x-\frac{x^2}{2}$$

$$=(a-1)+(a-1)x+(a-1)\frac{x^2}{2}+\frac{ae^{\xi}}{3!}x^3$$

由于 $0<a<1$，$f(0)\neq 0$，若 $f(x)$至少有两个根，设 x_1，x_2 是其中最小的两个，且 $x_1<x_2$，由 $f(x)$与 $f'(x)$的表示式及 $f(0)\neq 0$ 可以得出，$f(x)$与 $f'(x)$不可能有相同的实根，故

$$f'(x_1)\neq 0,\quad f'(x_2)\neq 0$$

又 $f(-\infty)=-\infty$，则必有 $f'(x_1)>0$，$f'(x_2)<0$．而事实上

$$f'(x_2)=ae^{x_2}-1-x_2=f(x_2)+\frac{x_2^2}{2}>0$$

矛盾．故 $f(x)$不可能有两个以上实根．得证．

例 42 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 为几阶无穷小？

解 $3x-4\sin x+\sin x\cos x$

$$=3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$=3x-4\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)+\frac{1}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right)$$

$$=\frac{1}{10}x^5+o(x^6)$$

故当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 是 5 阶无穷小．

例 43 设在$[0,a]$上，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$在$(0,a)$内取得最大值，证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$．

证 设 $c\in(0,a)$是 $f(x)$的最大值点，则有

$$f'(c)=0$$

根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,a)$，使

$$\begin{aligned}&|f'(0)|+|f'(a)|\\=&|f'(0)-f'(c)|+|f'(a)-f'(c)|\\=&|f''(\xi_1)c|+|f''(\xi_2)(a-c)|\\\leqslant&Mc+M(a-c)=Ma\end{aligned}$$

例 44 设 $x>0$，$y>0$，证明：当 $\beta>\alpha>0$ 时，有

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

证 当 $x=y$ 时，不等式成为

$$(2x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(2x^\beta)^{\frac{1}{\beta}},\quad 即\ 2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}$$

显然成立.

当 $x\neq y$，不妨设 $y>x>0$，记 $c=\dfrac{y}{x}$，则 $c>1$，只需证

$$(1+c^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+c^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

令 $\quad f(t)=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}$

$$\begin{aligned}f'(t)&=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}\left[-\frac{1}{t^2}\ln(1+c^t)+\frac{c^t\ln c}{t(1+c^t)}\right]\\&=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}\frac{c^t(\ln c^t-\ln(1+c^t))-\ln(1+c^t)}{t^2(1+c^t)}\\&<0\end{aligned}$$

故 $f(t)$ 单调减少，有

$$f(\alpha)>f(\beta)$$

即 $$(1+c^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+c^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

故 $$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

例 45 证明：

(1) $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)-\ln n\right]$ 存在.

证 (1) 令 $f(x)=\ln x$，根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in$

$(n,n+1)$，使

$$\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi}$$

由于
$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

故
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

(2) 令 $x_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n$

由
$$\begin{aligned}&x_{n+1}-x_n\\&=\left(1+\frac{1}{2}-\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)-\\&\quad\left(1+\frac{1}{2}-\cdots+\frac{1}{n}\right)+\ln n\\&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 单调减少．又由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

有
$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1\\&>\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-1\right)+1\\&=\frac{1}{n+1}>0\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，得证．

例 46 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f''(x)>0$，证明：

(1) 对于 $a<x<x_0<y<b$，存在 $\lambda(0<\lambda<1)$，使 $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$；

(2) 对于满足 $0<\lambda<1$ 的 λ，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

证　(1) 令$\frac{y-x_0}{y-x}=\lambda$，则 $0<\lambda<1$，且有

$$x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$$

(2) 令 $\lambda x+(1-\lambda)y=x_0$. $\exists\ \xi_1\in(x,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,y)$使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$f(y)=f(x_0)+f'(x_0)(y-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(y-x_0)^2$$

由于 $f''(\xi_1)>0$，$f''(\xi_2)>0$，$x\neq x_0$，$y\neq y_0$，故有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(y)>f(x_0)+f'(x_0)(y-x_0)$$

$$\begin{aligned}&\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\\&>\lambda f(x_0)+\lambda f'(x_0)(x-x_0)+(1-\lambda)f(x_0)+\\&\quad(1-\lambda)f'(x_0)(y-x_0)\\&=f(x_0)-f'(x_0)[\lambda x+(1-\lambda)y-x_0]\\&=f(x_0)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)\end{aligned}$$

故得证.

例 47　设 a_1，a_2，…，a_n 为常数，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|,\quad \left|\sum_{j=1}^{n}a_{n-j+1}\sin jx\right|\leqslant|\sin x|$$

试证明：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}$.

证　设 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx, g(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{n-j+1}\sin jx$

$$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$$

$$g'(x)=a_n\cos x+2a_{n-1}\cos 2x+\cdots+na_1\cos nx$$

$$f'(0)+g'(0)=(n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

故　$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\frac{|f'(0)+g'(0)|}{n+1}\leqslant\frac{|f'(0)|+|g'(0)|}{n+1}$

另一方面，由已知条件

$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\right|$$

$$\leqslant\lim_{x\to0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$$

同理$|g'(0)|\leqslant1$,因此有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}$$

例 48 (1) 设 $f(x)$二阶可导，且 $f''(x)<0$，则对任意 n 个不同点 x_1，x_2，…，x_n，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

(2) 证明 $\cos\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k$,其中$-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\frac{\pi}{2}$;

(3) 设 $0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，令 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明

$$\frac{\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n}{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^n$$

证 (1) 设 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，根据泰勒公式，有

$$f(x_k)=f(x_0)+f'(x_0)(x_k-x_0)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x_k-x_0)^2$$

其中 ξ_k 在 x_0 与 x_k 之间，由于 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个不同点，故 x_1-x_0，x_2-x_0，…，x_n-x_0 中至少有一个不为零，因此有

$$\begin{aligned}&f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\\=&nf(x_0)+f'(x_0)(x_1+x_2+\cdots+x_n-nx_0)+\\&\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x_0)^2+\cdots+\\&\frac{f''(\xi_n)}{2!}(x_n-x_0)^2\end{aligned}$$

$$< nf(x_0) = nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

故 $$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) > \frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

(2) 令 $f(\theta)=\cos\theta$，则在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 有

$$f''(\theta) = -\cos\theta < 0$$

故有 $$\cos\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k$$

(3) 令 $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\sin x-\ln x$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \cot x - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

故有

$$\frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = f(x_0)$$

(这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可能是相同点，因此不等号为 $\leqslant$)即

$$\frac{1}{n}\left(\ln\frac{\sin x_1}{x_1} + \ln\frac{\sin x_2}{x_2} + \cdots + \ln\frac{\sin x_n}{x_n}\right) \leqslant \ln\frac{\sin x_0}{x_0}$$

$$\ln\frac{\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n}{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant n\ln\frac{\sin x_0}{x_0} = \ln\left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^n$$

故 $$\frac{\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n}{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^n$$

例 49 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且满足 $|f(x)| \leqslant a$，$|f''(x)| \leqslant b$ ($a>0, b>0$ 是常数)，证明对任意 $x \in (0,1)$，$|f'(x)| \leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

证 利用泰勒公式，对 $\forall\, x \in (0,1)$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2, \quad \xi_1 \in (0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2,\xi_2\in(x,1)$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2]$$

$$|f'(x)|=\left|f(1)-f(0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]\right|$$

$$\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|x^2+|f''(\xi_2)|(1-x)^2]$$

$$\leqslant a+a+\frac{1}{2}(bx^2+b(1-x)^2)$$

$$=2a+\frac{b}{2}(1-2x(1-x))$$

$$\leqslant 2a+\frac{b}{2}$$

例50 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in(0,1)}f(x)=-1$，证明 $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8$.

证 由于 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in(0,1)}f(x)=-1$

故∃ $a\in(0,1)$，使 $f(a)=-1$，$f'(a)=0$

利用泰勒公式

$$f(0)=f(a)+f'(a)(-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-a)^2,\quad \xi_1\in(0,a)$$

$$f(1)=f(a)+f'(a)(1-a)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-a)^2,\quad \xi_2\in(a,1)$$

将 $f(0)=f(1)=0$，$f(a)=-1$，$f'(a)=0$ 代入得

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}$$

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)>\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8$

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$f''(\xi_2)\geqslant\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=8$

故 $$\max_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$$

例 51 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在(a,b)内必存在一点 ξ，使

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证 由泰勒公式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},\qquad \xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$

$$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},\qquad \xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

两式相减得

$$0=f(a)-f(b)+\frac{1}{8}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))(b-a)^2$$

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|$$

$$\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot 2|f''(\xi)|$$

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

例 52 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$|f''(x)|\geqslant 1$，求证：

(1) 若 $f(a)=f(b)=0$，则$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\geqslant\frac{1}{8}(b-a)^2$；

(2) 若 $b-a=2$，则在曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 上存在三个点 A，B，C，使 $\triangle ABC$ 的面积 $\geqslant\frac{1}{2}$.

证 (1) 由已知条件可得 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 连续，故 $\exists\ x_0\in[a,b]$，使

$$|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

由于 $|f''(x)|\geqslant 1$，$f(x)$ 不是常数，又 $f(a)=f(b)=0$，故 $x_0\in(a,b)$，且 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \qquad (\xi\text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

得

$$|f(x_0)-f(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\right|\geqslant\frac{1}{2}(x-x_0)^2$$

$$|f(x_0)|=|f(x_0)-f(a)|\geqslant\frac{1}{2}(x_0-a)^2$$

$$|f(x_0)|=|f(x_0)-f(b)|\geqslant\frac{1}{2}(x_0-b)^2$$

故
$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(x_0)|\geqslant\max\left\{\frac{1}{2}(x_0-a)^2,\frac{1}{2}(x_0-b)^2\right\}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2=\frac{1}{8}(b-a)^2$$

(2) 取 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$，$C(x,f(x))$，设

$$F(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & x\\ f(a) & f(b) & f(x)\end{vmatrix}$$

则
$$F''(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ a & b & 0\\ f(a) & f(b) & f''(x)\end{vmatrix}$$

且 $\triangle ABC$ 的面积为 $|F(x)|$.

由于 $\quad F(a)=F(b)=0$

$$|F''(x)| = \frac{1}{2}(b-a)|f''(x)| \geqslant 1$$

由(1)存在 $x_0 \in (a,b)$，使

$$|F(x_0)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |F(x)| \geqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 = \frac{1}{2}$$

例 53 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，且

$$M_i = \max_{x \in (-\infty,+\infty)} |f^{(i)}(x)| < +\infty \qquad (i = 0,1,2)$$

证明：$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

证 对$\forall\, x \in (-\infty,-\infty)$及 $h>0$，由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2, \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(-h) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2, \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

两式相减得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^2}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

$$2h|f'(x)| = \left|f(x+h) - f(x-h) - \frac{h^2}{2}f''(\xi_1) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_2)\right|$$

$$\leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$

$$\leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}2M_2 = 2M_0 + M_2h^2$$

由 x 的任意性，有

$$2hM_1 \leqslant 2M_0 + M_2h^2$$

$$M_2h^2 - 2hM_1 + 2M_0 \geqslant 0$$

这是关于 h 的二次三项式，因此有

$$\Delta = (-2M_1)^2 - 4M_2 \cdot 2M_0 \leqslant 0$$

即 $$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$$

例 54 (1) 设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2} = -1$，判断 $f(1)$是否为 $f(x)$的极值；

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，判断 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值.

解 (1) 由于

$$\lim_{x\to1} = \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1} = -1$$

有
$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$$

且在 $x=1$ 附近 $f(x)-f(1)<0$，故 $f(1)$ 是极大值.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，可知在 $x=0$ 附近，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调增加. 因为 $f'(0)=0$，故当 $x<0$，$f'(x)<0$；当 $x>0$，$f'(x)>0$，所以 $f(0)$ 是极小值.

例 55 求在 $x=1$ 时有极大值 6，在 $x=3$ 时有极小值 2 的最低幂次的多项式.

解 设 $f'(x)=A(x-1)(x-3)=A(x^2-4x+3)$

则
$$f(x)=A\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+B$$

由 $f(1)=6$，$f(3)=2$，得

$$\frac{4}{3}A+B=6,\quad B=2$$

解得 $A=3$，$B=2$，故所求多项式为

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$$

例 56 设函数 $f(x)$ 满足方程

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0,$$

求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

解 在方程中用 $-\dfrac{1}{x}$ 替换 x，得

$$3f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0$$

即 $$4f(x)+3x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)-7x^3=0$$

与已知方程联立消去 $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ 得

$$f(x)=4x^3+\frac{3}{x}$$

$$f'(x)=12x^2-\frac{3}{x^2}$$

$$f''(x)=24x+\frac{6}{x^3}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，由于

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=24\sqrt{2}>0,\quad f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-24\sqrt{2}<0$$

故 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}$ 是极小值，$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4\sqrt{2}$ 是极大值.

例 57 设一质点在平面内运动，它的坐标为 $x=t^3-t$，$y=t^4+t(-\infty<t<+\infty)$，证明质点运动曲线在 $t=0$ 处有一拐点，且运动速度在 $t=0$ 处有一极大值.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3+1}{3t^2-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{4t^3+1}{3t^2-1}\right)'\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{6t(2t^3-2t-1)}{(3t^2-1)^3}$$

当 $t=0$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}=0$，且在 $t=0$ 两侧 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 改变符号，因此运动曲线在 $t=0$ 处有一拐点.

设运动速度为 v，$f(t)=v^2$，则

$$f(t)=v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2$$

$$f'(t)=12t(8t^4+3t^2+8t-1)$$

$$f''(t)=12t(40t^2+9t^2+16t-1)$$

$t=0$ 时 $f'(t)=0$，又 $f''(0)=-12<0$，故 $f(t)$ 在 $t=0$ 处取得极大

值，因此 v 在 $t=0$ 处取得极大值.

例 58 已知 $y^2=6x$，试从其所有与法线重合的弦中找出一条最短弦.

解 抛物线的参数方程为 $x=6t^2$，$y=6t$，其上点 $A(6t^2,6t)$ 处的法线斜率为

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-2t$$

设 $B(6s^2,6s)$ 是抛物线上另一点，则 A，B 两点连线的斜率为

$$\frac{6(s-t)}{6(s^2-t^2)}=\frac{1}{s+t}$$

若此弦过法线，则有

$$\frac{1}{s+t}=-2t，\quad 即 s=-t-\frac{1}{2t}$$

设 $f(t)=AB^2=(6t-6s)^2+(6t^2-6s^2)^2$

$$=\frac{9(64t^6+48t^4+12t^2+1)}{4t^4}=\frac{9}{4}\frac{(1+4t^2)^3}{t^4}$$

令 $f'(t)=\dfrac{9(1+4t^2)^2(2t^2-1)}{t^5}=0$

得 $t^2=\dfrac{1}{2}$

在 $t^2=\dfrac{1}{2}$ 两侧，$f'(t)$ 由负变正，因此当 $t^2=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(t)$ 最小，因此 AB 最短，且

$$AB_{\min}=9\sqrt{3}$$

例 59 顶角为 90°，底半径为 R 的圆锥形容器顶朝下，现盛满了水，在其上放一个半径为 r 的球（密度大于 1），问 r 多大时该球排出的水最多，并求此时的排水量.

解 如图 4，令水内球缺

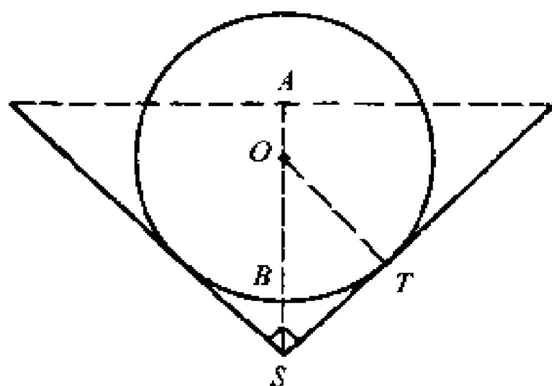


图 4

的高为 H，则

$$H = AB = AS - BS = AS - OS + OB$$
$$= AS - \sqrt{2}OT + OB$$
$$= R - \sqrt{2}r + r$$
$$= R - (\sqrt{2} - 1)r$$

由于水的密度是 1，故排出的水量等于水内球缺体积 $V(r)$.

$$V(r) = \frac{\pi}{3}H^2(3r - H)$$
$$= \frac{\pi}{3}[R - (\sqrt{2} - 1)r]^2[3r - R + (\sqrt{2} - 1)r]$$

（记 $\lambda = \sqrt{2} - 1$）

$$= \frac{\pi}{3}(R - \lambda r)^2(3r + \lambda r - R)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3} \cdot 2(R - \lambda r)(-\lambda)(3r + \lambda r - R) + \frac{\pi}{3}(R - \lambda r)^2(3 + \lambda)$$
$$= \pi(R - \lambda r)[(1 + \lambda)R - \lambda(3 + \lambda)r]$$

令 $\frac{dV}{dr} = 0$，得

$$r_1 = \frac{R}{\lambda} = \frac{R}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)R$$

$$r_2 = \frac{(1 + \lambda)R}{\lambda(3 + \lambda)} = \frac{\sqrt{2}R}{(\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{2} - 1)} = R$$

由实际问题，$V(r)$确有最大值，又

$$V(r_1) = 0, \quad V(r_2) = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{3}R^3$$

故当 $r = R$ 时排水量最多，且最多排水量为$\frac{2(\sqrt{2} + 1)}{3}R^3$.

例 60 公园中有一高为 a 的鱼美人塑像，其底座高为 b($b > 2$)，为了观赏时对塑像张成的夹角最大（即看得最清楚），应该站在离底座脚多远的地方？

解 如图 5，设游人的水平视线距地面为 c，且 $c<b$，人对塑像张成的夹角为 θ，记 $h=b-c$，则有

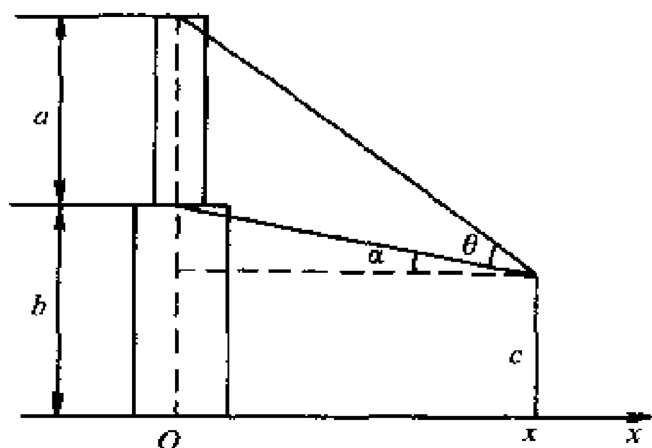


图 5

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{a+h}{x}$$

$$\tan\alpha=\frac{h}{x}$$

$$\tan\theta=\tan((\theta+\alpha)-\alpha)=\left(\frac{a+h}{x}-\frac{h}{x}\right)\Big/\left(1+\frac{a+h}{x}\,\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{ax}{x^2+(a-h)h}$$

两边对 x 求导

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{ah(a+h)-ax^2}{[x^2+(a+h)h]^2}$$

令 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=0$，得 $x=\sqrt{(a+h)h}$.

当 $x<\sqrt{(a+h)h}$，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}>0$，

当 $x>\sqrt{(a+h)h}$，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}<0$，

故当 $x=\sqrt{(a+h)h}$ 时，θ 取得最大值.

例 61 根据经验，一架水平飞行的飞机，其降落曲线是一条三次抛物线. 如图 6 所示，已知飞机的飞行高度为 h，飞机的着落点为原点 O，且在整个降落过程中，飞机的水平速度始终保持为常数 u，出于安全考虑，飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过 $\frac{g}{10}$（g 是重力加速度），试确定飞机的降落曲线及开始下降点 x_0 所能允许的最小值.

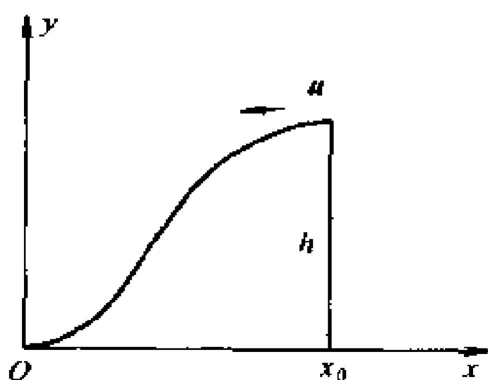


图 6

解 设飞机的降落曲线为

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

由题设有

$$y(0)=0,\ y(x_0)=h$$
$$y'(0) = 0,\quad y'(x_0) = 0$$

因此得

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = h \\ 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \end{cases}$$

解得
$$a=-\frac{2h}{x_0^3},\ b=\frac{3h}{x_0^2},\ c=d=0$$

故
$$y=-\frac{2h}{x_0^3}x^3+\frac{3h}{x_0^2}x^2=-\frac{h}{x_0^2}\left(\frac{2}{x_0}x^3-3x^2\right)$$

飞机的垂直速度为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，垂直加速度为$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，水平速度为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{h}{x_0^2}\left(\frac{6}{x_0}x^2-6x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{6hu}{x_0^2}\left(\frac{x^2}{x_0}-x\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{6hu}{x_0^2}\left(\frac{2x}{x_0}-1\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{6hu^2}{x_0^2}\left(\frac{2x}{x_0}-1\right)$$

由于 $x\in[0,x_0]$，$\max\left|\frac{2x}{x_0}-1\right|=1$，故

$$\max\left|\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right| = \frac{6hu^2}{x_0^2}$$

由题设，$\max\left|\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right| \leqslant \frac{g}{10}$，故

$$\frac{6hu^2}{x_0^2} \leqslant \frac{g}{10}$$

解得 $x_0 \geqslant u\sqrt{\frac{60h}{g}}$，故 x_0 所允许的最小值为 $u\sqrt{\frac{60h}{g}}$.

例 62 直线 $y=-x+k$ 交椭圆 $5x^2+6xy+5y^2=32$ 于 B、C，且点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 为该椭圆的顶点，问 k 为何值时才能使$\triangle ABC$ 的面积为最大？并求这一最大值.

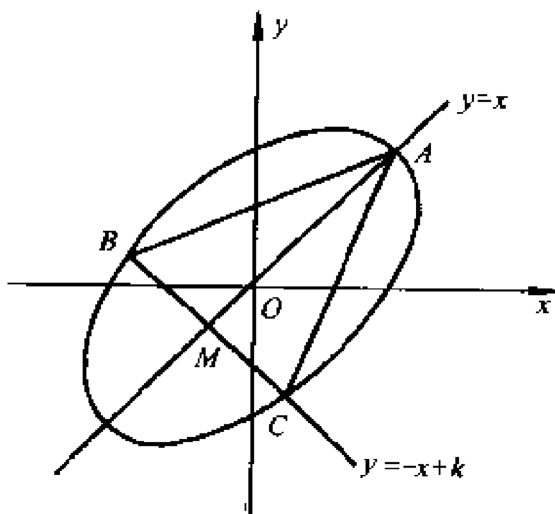


图 7

解 如图 7，顶点 A 在直线 $y=x$ 上，因为椭圆方程中 x^2 与 y^2 系数相等，所以椭圆的一个轴在直线 $y=x$ 上，又因为 $y=-x+k$ 与 $y=x$ 垂直，故点 B、C 关于直线 $y=x$ 对称. 设两直线 $y=x$ 与 $y=-x+k$ 的交点为 M，则$\triangle ABC$ 的面积为 $S=|AM|\cdot|MB|$.

由 $\begin{cases} y=x \\ y=-x+k \end{cases}$ 解得 $M\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$

由 $\begin{cases} y=-x+k \\ 5x^2+6xy+5y^2=32 \end{cases}$

解得 $B\left(\frac{k-\sqrt{-4k^2+32}}{2}, \frac{k+\sqrt{-4k^2+32}}{2}\right)$

由 $-4k^2+32>0$，有 $k<2\sqrt{2}$

$$|AM|=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{k}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{k}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{k}{2}\right)$$

$$|MB|=\sqrt{\left(\frac{k}{2}-\frac{k-\sqrt{-4k^2+32}}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}-\frac{k+\sqrt{-4k^2+32}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{-2k^2+16}$$

故 $S=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{k}{2}\right)\sqrt{-2k^2+16}$

令 $\frac{dS}{dk}=-\sqrt{2}\frac{-2k^2+2\sqrt{2}k+8}{\sqrt{-2k^2+16}}=0$

解得 $k=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{2}$

由于 $k<2\sqrt{2}$，故 $k=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

由问题的实际意义，S 确有最大值，故当 $k=-\sqrt{2}$ 时，S 取得最大值

$$S_{max}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{-2(-\sqrt{2})^2+16}=6\sqrt{3}$$

例 63 证明光的折射定律$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$，其中 v_1，v_2 分别是光在介质 I 与介质 II 中的传播速度，α、β 分别是光的入射角与折射角.

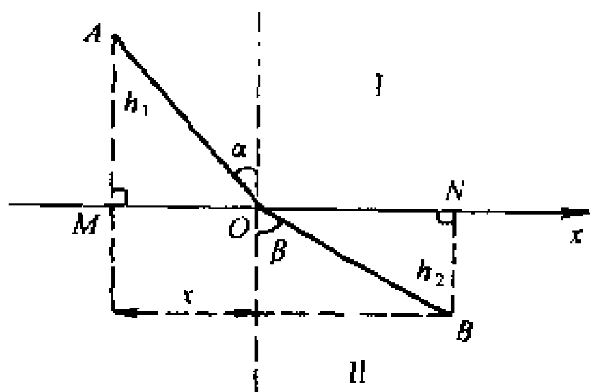


图 8

解 如图 8 建立坐标系，设光从点 A 传播到点 B. 由于光线是沿着最省时的路线传播的，而在同一介质中，光的最速路线是直线，故光由 A 到 B 的传播路径为折线 AOB. 设 A、B 在 x 轴上的投影分别为 M、N，记 $MN=l$，$AM=h_1$，

$BN=h_2$，$MO=x$，则光传播所需时间为

$$t(x)=\frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\sqrt{h_2^2+(l-x)^2},\quad x\in[0,l]$$

$$t'(x)=\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\frac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}$$

$$t''(x)=\frac{1}{v_1}\frac{h_1^2}{(h_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{v_2}\frac{h_2^2}{[h_2^2+(l-x)^2]^{3/2}}>0$$

故驻点必是极小点. 令 $t'(x)=0$，得驻点 x 应满足

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\frac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}$$

由于 $$\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}=\sin\beta$$

有 $$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

此时传播时间取得最小值，因此光线传播满足此式.

例 64 设 $\theta\in[0,2\pi]$.

(1) 求 $|\sin^2\theta\sin2\theta|$ 的最大值；

(2) 证明 $|\sin^2\theta\sin^3 2\theta\sin^3 4\theta\cdots\sin^3(2^{n-1}\theta)\sin(2^n\theta)|$ 在 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 有极大值；

(3) 证明 $\sin^2\theta\sin^2 2\theta\cdots\sin^2(2^n\theta)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

证 (1) 令 $f_1(\theta)=\sin^2\theta\sin2\theta$

由 $$f_1'(\theta)=2\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)=0$$

得 $$\theta=0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi$$

在 $\theta=0,\pi,2\pi$，$|f_1(\theta)|=0$，在其他几点处，$|f_1(\theta)|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，故 $|\sin^2\theta\sin2\theta|$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(2) 设 $f_n(\theta)=\sin^2\theta\sin^3 2\theta\sin^3 4\theta\cdots\sin^3(2^{n-1}\theta)\sin(2^n\theta)$，由(1)可知 $|f_1(\theta)|$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处有极大值.

设 $|f_n(\theta)|$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 有极大值，由于

$$|f_{n+1}(\theta)| = |f_n(\theta)||\sin^2(2^n\theta)\sin(2^{n+1}\theta)|$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，利用数学归纳法可以证得

$$2^n\cdot\frac{\pi}{3}=\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi \text{ 或} \left(2k+\frac{2}{3}\right)\pi$$

$$2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}=\left(2m+\frac{1}{3}\right)\pi \text{ 或} \left(2m+\frac{2}{3}\right)\pi \quad (k,m\text{ 是正整数})$$

故
$$\left|\sin^2\left(2^n\cdot\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|f_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

因此
$$\max|\sin^2(2^n\theta)\sin(2^{n+1}\theta)|=\left|f_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

所以 $|f_{n+1}(\theta)|$ 也在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 取得极大值. 故得证.

(3) 由(2)有

$$|f_n(\theta)|\leqslant\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2+3(n-1)+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

故
$$\begin{aligned}&\sin^2\theta\sin^2 2\theta\cdots\sin^2(2^n\theta)\\
&=|f_n(\theta)|^{\frac{2}{3}}\left|\sin^{\frac{4}{3}}\theta\sin^{\frac{4}{3}}(2^n\theta)\right|\\
&\leqslant|f_n(\theta)|^{\frac{2}{3}}\leqslant\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|^{\frac{2}{3}}\\
&=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\end{aligned}$$

例 65 飞机有时要沿抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4000}$ (m) 作俯冲飞行，设飞行员体重 70 kg，在原点处速度为 300 m/s. 求俯冲到原点时飞行员对座椅的压力.

解 如图 9，在原点飞行员受到两个力作用，即重力 $\boldsymbol{P}$ 和座椅

对飞行员的反力 $\boldsymbol{Q}$(Q 为飞行员对座椅压力的相反力)，$Q-P$ 为飞行员随飞机俯冲到原点时所需的向心力 F，即

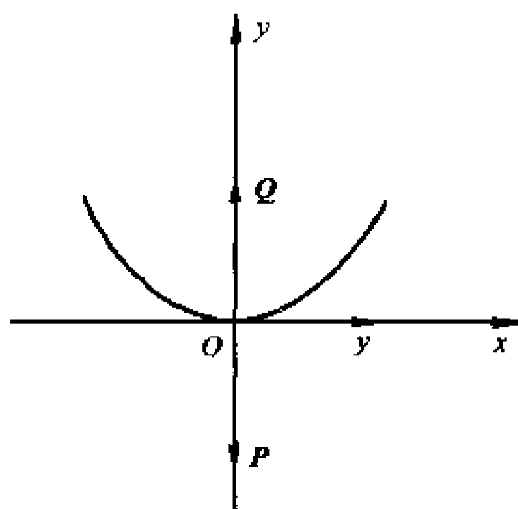


图 9

$$Q-P=F, Q=P+F$$

由已知 $P=mg\approx686$ N，而

$$F=\frac{mv^2}{R} \quad (R\text{ 为曲率半径})$$

$$y'=\frac{x}{2000}, \quad y''=\frac{1}{2000}$$

$$R=\left.\frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}\right|_{x=0}=2000$$

$$F=\frac{70\times300^2}{2000}=3150\ (\text{N})$$

故 $$Q=686+3150\approx3836\ (\text{N})$$

因此飞行员对座椅的压力为 3836 N.

第三章　一元函数积分学

一、内容要点

本章内容包括不定积分与定积分的概念、性质、计算及应用.

关于定积分定义:

定积分的定义为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中极限与分点$x_i$的取法及$\xi_i$的取法无关. 因此，当$f(x)$在$[a,b]$上连续时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

特别

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

上述两式可用于求某些数列的极限.

关于定积分性质:

若$f(x)\geqslant 0$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

若$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(x)\geqslant 0$，且在某点$x_0\in[a,b]$处，$f(x_0)>0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

若在$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则$f(x)\equiv 0$.

关于变上限的积分:

若$f(x)$是连续函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

若$f(x,t)$是可微函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t=f(x,x)+\int_a^x f'_x(x,t)\mathrm{d}t$$

重要不等式：

柯西不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

对无穷区间上的广义积分有同样结果.

二、例题选讲

例 1 求下列不定积分.

(1) $\int\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\dfrac{x^{3n-1}\mathrm{d}x}{(x^{2n}+1)^2}\quad(n\neq 0)$；

(3) $\int e^{\sin x}\dfrac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$

解 (1) 原式 $=\int\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}+\int\frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$$

(2) 令 $x^n=\tan t$，则 $x^{3n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\tan^2t\mathrm{d}\tan t$，

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{n}\tan^2t\mathrm{d}\tan t}{(\tan^2t+1)^2}$$

$$=\int\frac{\tan^2t\sec^2t}{n\sec^4t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^2t}{n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2n}\int(1-\cos2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}\left(t-\frac{1}{2}\sin2t\right)+C$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\arctan x^n-\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right)+C$$

(3) $\int e^{\sin x}\dfrac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= \int x\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x} - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sec x \\
&= x\mathrm{e}^{\sin x} - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\sin x}\sec x + \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= x\mathrm{e}^{\sin x} - \mathrm{e}^{\sin x}\sec x + C
\end{aligned}
$$

例 2 当常数 a, b 满足什么条件时，在不定积分 $\int \frac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$ 中：(1) 没有反正切函数；(2)没有对数函数.

解 $\frac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} - \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

(1) 若积分没有反正切函数，则 $D=0$，故有

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+b &= A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x+1)^2 \\
&= (A+C)x^3 + (A+B+2C)x^2 + (A+C)x + (A+B)
\end{aligned}
$$

比较两边同次幂系数得

$$0 = A+C,\quad a = A+C$$

故得 $a=0$.

(2) 若积分没有对数函数，则 $A=0$，$C=0$，故有

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+b &= B(x^2+1) + D(x+1)^2 \\
&= (B+D)x^2 + 2Dx + (B+D)
\end{aligned}
$$

比较两边同次幂系数得

$$1 = B+D,\quad b = B-D$$

故有 $b=1$.

例 3 计算下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{1001}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{1993}x}$；

(3) $\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$；(4) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$； (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$；

(7) $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ （m,n 为自然数）；

(8) $\int_{-1/2}^{1/2} \left[x\sin x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \sqrt{\ln^2(1-x)} \right] dx$

解 (1) 令 $x = \sin t$

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^{1001} dx = -2\int_0^1 (1-x^2)^{1001} dx$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2003} t dt = -2\frac{2002!!}{2003!!}$$

(2) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{1993}x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dt}{1+\cot^{1993}x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{1993}x}{1+\tan^{1993}x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{1993}x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{1993}x}{1+\tan^{1993}x} dx = \frac{\pi}{2}$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{1993}x} = \frac{\pi}{4}$$

(3) 令 $9-x=u+3$，即 $u=6-x$，则

$$I \xlongequal{\text{def}} \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)+\ln(x+3)}} dx$$

$$= -\int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(u+3)}}{\sqrt{\ln(u+3)+\ln(9-u)}} du$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)+\ln(9-x)}} dx$$

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)+\ln(x+3)}} dx +$$

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)+\ln(9-x)}}\mathrm{d}x = 2$$

故 $\qquad I=1$

(4) 令 $x=\tan t$，则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t$$

$$\left(令\ u=\frac{\pi}{4}-t\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

(5) $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$(令\ t=-x)$$

$$=\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t}{1+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,\frac{1+\mathrm{e}^{-x}+1+\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})(1+\mathrm{e}^{-x})}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

(6) 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$I \xlongequal{\text{def}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x$$

（令 $t=2x$）

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$$

$\left(\text{令 } u=t-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I$$

故 $$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(7) $$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n\mathrm{d}x^{m+1}$$

$$=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1(1-x)^{n-1}x^{m+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{m+1}\int_0^1(1-x)^{n-1}x^{m+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\int_0^1(1-x)^{n-2}x^{m+2}\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}$$

(8) 由于 $x\sin x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，故

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left[x\sin x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\ln^2(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1/2}^{0}\ln(1-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1/2}-\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)]\Big|_{-1/2}^{0}-$$

$$[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)]\Big|_{0}^{1/2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln3-2\ln2$$

例 4 计算 $I=\int_{e^{-n\pi}}^{1}\left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

解 令 $\ln\frac{1}{x}=t$，即 $x=\mathrm{e}^{-t}$

$$I=\int_{e^{-n\pi}}^{1}\left|\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right|\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{n\pi}^{0}-|\sin t|t\mathrm{d}t=\int_{0}^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(-t\cos t+\sin t)\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}[k\pi(-1)^{k}-(k-1)\pi(-1)^{k-1}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=\frac{n(1+2n-1)}{2}\pi=n^2\pi$$

注 也可以利用变换 $u=n\pi-t$ 求积分 $\int_{0}^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t$.

例 5 求 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$ （n 为正整数）.

解 设 $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$，则由

$$I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\mathrm{d}x=2$$

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx - \sin(2n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

有 $$I_n = I_{n-1} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} = I_{n-2} + \frac{2(-1)^{n-2}}{2n-3} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$= \cdots = I_1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots - \frac{2(-1)^{n-2}}{2n-3} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$$

注 用同样方法可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

例 6 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x$ （n 为正整数）

解 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x$

则 $$I_n = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}\cos nx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^n x\cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos nx \sin x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos nx \sin x \mathrm{d}x$$

于是

$$I_n = \frac{1}{2}(I_n + I_n)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x + \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos nx \sin x \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx\cos x - \cos nx \sin x)\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\sin(n-1)x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}I_{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots +$$

$$\frac{1}{2^n(n-(n-1))} + \frac{1}{2^n}I_0$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

例 7 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x \qquad (a > 0)$

解 令 $\varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x$

则 $\varphi(1)=0$，且当 $a\neq 1$ 时

$$\varphi'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{\cos^2 x + a^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } t = \tan x} \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{-\frac{2a}{a^2-1}}{1+a^2t^2} + \frac{\frac{2a}{a^2-1}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left(-\frac{2}{a^2-1}\arctan(at) + \frac{2a}{a^2-1}\arctan t\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)$$

$$\varphi(a) = \int\varphi'(a)\mathrm{d}a = \frac{\pi}{2}\int\left(-\frac{2}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)\mathrm{d}a$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{2a}{a^2-1}\right)\mathrm{d}a$$

$$= \frac{\pi}{2}(\ln|a+1| - \ln|a-1| + \ln|a^2-1|) + C$$

$$= \pi\ln(a+1) + C$$

由 $\varphi(1)=0$，得 $C=-\pi\ln2$，故

$$I = \varphi(a) = \pi\ln(a+1) - \pi\ln2 = \pi\ln\frac{a+1}{2}$$

例8 设 a 为任意实数，求 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$.

解 令 $x=\tan t$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^a t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^a t}{\sin^a t+\cos^a t}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{\pi}{2}-u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^a t}{\cos^a t+\sin^a t}\mathrm{d}t$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^a t+\cos^a t}{\sin^a t+\cos^a t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

故 $$I=\frac{\pi}{4}$$

例9 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证 令 $x=\frac{1}{t}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$\xlongequal{\text{令 } u = x - \frac{1}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2 + u^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2 + u^2}$$

$$= \sqrt{2}\arctan \frac{u}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

故 $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

例 10 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ ，计算

(1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-ty^2}\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$

解 (1)令 $u=\sqrt{t}\,y$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-ty^2}\mathrm{d}y = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{\sqrt{t}\,x} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \begin{cases} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \int_0^{-\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & x < 0 \end{cases}$$

(2)由于 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$，$\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$I \xlongequal{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{令 } t = x - \frac{1}{x}\right) \qquad\qquad \left(\text{令 } u = \frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-2}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{-\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)}\mathrm{d}u$$

$$= \mathrm{e}^{-2}\sqrt{\pi} - I$$

故 $$I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\sqrt{\pi}$$

例 11 已知$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)\mathrm{d}x=1$,求常数 a 和 b.

解 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$

因为此广义积分收敛，故 $b-a=0$，即 $a=b$，而

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln\frac{x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2+a}$$

$$=\ln\frac{2+a}{2}=1$$

解得 $a=2\mathrm{e}-2$，$b=2\mathrm{e}-2$

例 12 设 $f(x)$为连续函数,证明

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)\mathrm{d}x$$

证 $\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{2\pi}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$\left(记\ \theta=\arctan\frac{a}{b}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\right)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令 u=x+\theta}\int_\theta^{2\pi+\theta}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right)\mathrm{d}u$$ （被积函数以 2π 为周期）

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right)\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right)\mathrm{d}u$$

（令 t π u）

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right)\mathrm{d}u+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2-b^2}\sin t\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)\mathrm{d}x$$

例 13　设 $f'(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$，求证：

$$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$$

证　$F(2a)-2F(a)$

$$= \int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t - 2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

（令 $u=2a-t$）

$$= \int_0^a f(2a-u)f'(u)\mathrm{d}u - \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\mathrm{d}f(t) - \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

$$= f(2a-t)f(t)\Big|_0^a + \int_0^a f'(2a-t)f(t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$

$$= f^2(a)-f(0)f(2a)$$

例 14　已知函数 $f(x)=f(x+4)$，$f(0)=0$，且在 $(-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$，求 $f(9)$。

解　在 $(-2,2]$ 上

$$f'(x)=\begin{cases}-x & -2<x\leqslant 0\\ x & 0<x\leqslant 2\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C_1 & -2<x\leqslant 0\\ \dfrac{x^2}{2}+C_2 & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

由 $f(0)=0$，得 $C_1=C_2=0$，故

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2} & -2<x\leqslant 0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

$$f(9)=f(5)=f(1)=\frac{1}{2}$$

例 15 已知 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，且 $f(\pi)=2$，求 $f(0)$．

解 $5=\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}f'(x)$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x+\sin xf'(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}f(x)$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$

$=f(\pi)+f(0)$

故 $f(0)=5-f(\pi)=3$

例 16 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$．

解 设 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=a$，则有

$f(x)=3x-a\sqrt{1-x^2}$

$f^2(x)=9x^2+a^2-a^2x^2-6ax\sqrt{1-x^2}$

$a=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(9x^2+a^2-a^2x^2-6ax\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=3+\frac{2}{3}a^2-2a$

$2a^2-9a+9=0$

解得 $a=3$ 或 $a=\frac{3}{2}$，故

$$f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}\text{ 或 }f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$$

例 17 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 可微，其反函数为 $g(x)$，且 $\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(x^{3/2}-8)$，求 $f(x)$.

解 等式两边对 x 求导，得

$$g[f(x)]f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

即

$$xf'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{x}+C$$

令 $f(x)=1$，得 $\sqrt{x}+C=1$，$x=(1-C)^2$，而

$$0=\int_1^1 g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{3/2}-8)=\frac{1}{3}[(1-C)^3-8]$$

得 $C=-1$，故

$$f(x)=\sqrt{x}-1$$

例 18 设对任意正数 a，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，其中 $f(x)$ 为连续函数，$f(0)=L$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x = L\ln\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha、\beta>0)$$

证 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_a^{+\infty}\frac{f(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\frac{f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x \qquad (\text{分别令 } t=\alpha x, t=\beta x)$$

$$=\int_{\alpha a}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\beta a}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\alpha a}^{\beta a}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad (\text{利用广义中值定理})$$

$$=f(\xi)\int_{\alpha a}^{\beta a}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \qquad (\xi \text{ 在 } \alpha a \text{ 与 } \beta a \text{ 之间})$$

$$=f(\xi)\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

令 $a\to 0$，则 $f(\xi)\to f(0)=L$，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=L\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

例 19 设 $p(x)=2+4x+3x^2+5x^3+3x^4+4x^5+2x^6$，对于适合 $-1<k<5$ 的每个 k，定义 $I_k=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{p(x)}\mathrm{d}x$，问对应于哪个 k 的 I_k 最小？

解 当 $-1<k<5$ 时，I_k 都是收敛的. 令 $t=\frac{1}{x}$，则有

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{p(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t^{4-k}}{p(t)}\mathrm{d}t=I_{4-k}$$

因此有

$$I_k=\frac{1}{2}(I_k+I_{4-k})=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^k+x^{4-k}}{p(x)}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x^kx^{4-k}}}{p(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{p(x)}\mathrm{d}x=I_2$$

故当 $k=2$ 时，I_k 最小.

例 20 设 $f(x)=\int_0^x\left[1+\frac{x-t}{1!}+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t$，求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $f_k(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$

则 $\quad f_0(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{n}$

当 $k>0$，$f_k'(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t=f_{k-1}(x)$

故

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=f_0^{(n)}(x)+f_1^{(n)}(x)+\cdots+f_{n-1}^{(n)}(x)\\&=f_0^{(n)}(x)+f_0^{(n-1)}(x)+\cdots+f_0'(x)\\&=n^{n-1}\mathrm{e}^{nx}+n^{n-2}\mathrm{e}^{nx}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{nx}\\&=\begin{cases}\dfrac{n^n-1}{n-1}\mathrm{e}^{nx} & n>1\\ 2\mathrm{e}^{x} & n=1\end{cases}\end{aligned}$$

例 21 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

解 令 $u=x^n-t^n$，则

$$F(x)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}f(x^n)nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n}$$

$$=\frac{1}{2n}f'(0)$$

例 22 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$

解 设 $y_n=\dfrac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\ \frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$$

$$=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

例 23 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 单调减少，故

$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x + f(1)$$

$$= \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x + f(1)$$

即
$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + 1$$

$$\ln(1+n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$$

因此有
$$\frac{\ln(1+n)}{\ln n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leqslant \frac{1+\ln n}{\ln n}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{\ln n} = 1$$

故
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$$

例 24 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$

解 设$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$，则$I_n$单调减少且非负，故

$$I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1}$$

$$\frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{n!!}{(n+1)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \frac{\pi}{2}$$

即
$$\frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{1}{n} \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \frac{\pi}{2}}$$

故
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

例 25 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

证 记$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$，由于$I_n$单调减少且非负，故

$$I_{2n}I_{2n+1} \leqslant I_{2n}^2 \leqslant I_{2n}I_{2n-1}$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\right]^2$$

$$\leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2n+1}\frac{2}{\pi} \leqslant \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

例 26 设 $f(x)=x-[x]$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数），求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

解 当 $n\leqslant x<n+1$，

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2(x-1)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n(x-(n-1))\mathrm{d}x + \int_n^x(x-n)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-n)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2x}[n+(x-n)^2]$$

由于

$$\frac{1}{2(n+1)}(n+0) \leqslant \frac{1}{2x}[n+(x-n)^2] \leqslant \frac{1}{2n}(n+1)$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

例 27 设 $0<a<b$，求 $\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1(bx+a(1-x))^t\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t}}$.

解 令 $$u=bx+a(1-x)$$

$$f(t)=\left[\int_0^1(bx+a(1-x)^t\mathrm{d}x)\right]^{\frac{1}{t}}$$

则 $$\int_0^1(bx+a(1-x))^t\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b u^t\mathrm{d}u$$

$$=\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(1+t)}$$

$$\lim_{t\to 0}\ln f(t)=\lim_{t\to 0}\ln\left[\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(1+t)}\right]^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(b^{t+1}-a^{t+1})-\ln(b-a)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{b^{t+1}\ln b-a^{t+1}\ln a}{b^{t+1}-a^{t+1}}-1$$

$$=\frac{b\ln b-a\ln a}{b-a}-1=\frac{\ln\frac{b^b}{a^a}}{b-a}-1$$

故 $$\lim_{t\to 0}f(t)=\mathrm{e}^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

例 28 设函数 $f(x)$ 在 $(-L,L)$ 连续，在 $x=0$ 可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 求证：对任意给定的 $0<x<L$，存在 $0<\theta<1$，使 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

(2) 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\theta$.

解 (1) 令 $$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(x)$ 在 $[0,x]$ 可微，且 $F(0)=0$，根据拉格朗日中值定理，$\exists\ 0<\theta<1$，使

$$F(x)=F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$$

即 $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

也可以利用积分中值定理证明此结论如下：

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x (f(t)-f(-t))\mathrm{d}t$$

$$=(f(\xi)-f(-\xi))x=x(f(\theta x)-f(-\theta x))$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间，故 $\xi=\theta x$，$0<\theta<1$.

（2）由(1)中等式得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{f(\theta x)-f(0)}{x}-\frac{f(-\theta x)-f(0)}{x}$$

令 $x\to 0^+$，两边分别取极限，由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{2x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-2x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{x}-\frac{f(-\theta x)-f(0)}{x}\right]$$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta+f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$$

故有 $$f'(0)=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$$

由于 $f'(0)\neq 0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

例 29 设函数 $f(x)$满足 $f(1)=1$，且对 $x\geqslant 1$，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，试证$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在且小于 $1+\dfrac{\pi}{4}$.

证 由于 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}>0$，故 $f(x)$单调增加，又由于 $f(1)=1$，因此

$$f'(x)\leqslant\frac{1}{x^2+1}$$

故 $$\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^x\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

即 $$f(x)-f(1)\leqslant\arctan x-\arctan 1$$

$$f(x)\leqslant 1+\arctan x-\frac{\pi}{4}\leqslant 1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=1+\frac{\pi}{4}$$

因此 $f(x)$有上界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\leqslant 1+\frac{\pi}{4}$$

例 30 设函数 $f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$$

令 $$u=xt,\quad \varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\quad (x\neq 0)$$

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\quad (x\neq 0)$$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi(0)$$

故 $\varphi(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 31 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续函数，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

证 设 $x\in[nT,(n+1)T]$，则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left[\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

由于 $$\left|\frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{x}\int_{nT}^{(n+1)T}|f(t)|\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^T|f(t)|\mathrm{d}t=0$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

又 $$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{n}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{n}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

当 $x\to+\infty$，有 $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

因此 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

例 32 设对任意 x，$f(x+T)=f(x)$，T 是正常数，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 能表示成线性函数与周期函数之和.

证 对任意数 A，

$$F(x)=\int_a^x[f(x)-A+A]\mathrm{d}x=\int_a^x[f(x)-A]\mathrm{d}x+A(x-a)$$

下面证明，适当选取 A，可使 $G(x) \xlongequal{\text{def}} \int_a^x [f(x) - A]\,\mathrm{d}x$ 为周期函数．由于

$$G(x+T) - G(x) = \int_a^{x+T} [f(x) - A]\mathrm{d}x - \int_a^x [f(x) - A]\mathrm{d}x$$

$$= \int_x^{x+T} [f(x) - A]\mathrm{d}x = \int_x^{x+T} f(x)\mathrm{d}x - AT$$

$$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x - AT$$

故当 $$A = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

时，$G(x+T)-G(x)=0$，$G(x+T)=G(x)$，即 $G(x)$ 是周期函数，而 $A(x-a)$ 是线性函数．故得证.

例 33 设 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是连续正值函数，且 $f(-t)=f(t)$，设 $g(x) = \int_{-a}^{a} |x - t| f(t)\mathrm{d}t$，$-a \leqslant x \leqslant a, a > 0$.

(1) 证明 $g'(x)$ 是严格单调增的；

(2) 求出 $g(x)$ 的最小值点；

(3) 当 $g(x)$ 的最小值等于 $f(a)-a^2-1$ 时，求 $f(t)$.

解 (1) $g(x) = \int_{-a}^{x} (x - t) f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a (t - x) f(t)\mathrm{d}t$

$$= x\int_{-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-a}^{x} t f(t)\mathrm{d}t + \int_x^a t f(t)\mathrm{d}t - x\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$g'(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t + x f(x) - x f(x) - x f(x) - \int_x^a f(t)\mathrm{d}t + x f(x)$$

$$= \int_{-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0$$

故 $g'(x)$ 严格单调增加.

(2) $g'(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_{-x}^{-a} f(-t)(-\mathrm{d}t)$

$$= \int_{-a}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-x}^{-a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

由于 $f(t)>0$，因此由 $g'(x)=0$ 只能得出 $x=0$. 因为 $g'(x)$ 单调增，故当 $x<0$，$g'(x)<0$；当 $x>0$，$g'(x)>0$，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是最小值点.

(3) $g(x)$ 的最小值为

$$g(0)=-\int_{-a}^{0}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{a}tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_{0}^{a}tf(t)\mathrm{d}t=f(a)-a^2-1 \qquad (*)$$

对 a 求导得

$$2af(a)=f'(a)-2a$$

$$\frac{\mathrm{d}f(a)}{f(a)+1}=2a\mathrm{d}a$$

$$\ln(f(a)+1)=a^2+C$$

由(*)式，当 $a=0$ 时，$0=f(0)-1$，$f(0)=1$，故 $C=\ln 2$，因此得 $f(a)+1=\mathrm{e}^{a^2+\ln 2}=2\mathrm{e}^{a^2}$.

$$f(t)=2\mathrm{e}^{t^2}-1$$

例34 设在区间 $[a,b]$ $(1<a<b)$ 上，数 p 和 q 满足条件 $px+q\geqslant\ln x$，试求积分 $I=\int_a^b(px+q-\ln x)\mathrm{d}x$ 取得最小值时的 p 和 q 的值.

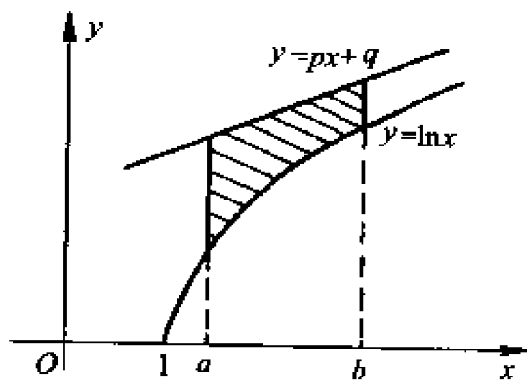


图10

解 如图10，由于 $px+q\geqslant\ln x$，故 I 表示曲线 $y=\ln x$，直线 $y=px+q$，$x=a$，$x=b$ 所围成图形的面积，显然，当 $y=px+q$ 与 $y=\ln x$ 相切时 I 较小，设切点为 $(c,\ln c)$，由于

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

则切线方程为

$$y = \frac{1}{c}(x-c) + \ln c = \frac{1}{c}x + \ln c - 1$$

于是

$$I = \int_a^b \left[\left(\frac{1}{c}x + \ln c - 1\right) - \ln x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2c}(b^2 - a^2) + \ln c \cdot (b-a) - \int_a^b (1 + \ln x) dx$$

$$\frac{dI}{dc} = -\frac{1}{2c^2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{c}(b-a)$$

$$= \frac{1}{c^2}(b-a)\left(-\frac{a+b}{2} + c\right)$$

令$\frac{dI}{dc}=0$，得 $c=\frac{a+b}{2}$.

当 $c<\frac{a+b}{2}$，$\frac{dI}{dc}<0$；当 $c>\frac{a+b}{2}$，$\frac{dI}{dc}>0$. 故当 $c=\frac{a+b}{2}$时，I 取得极小值，也是最小值，此时

$$p = \frac{1}{c} = \frac{2}{a+b}, \quad q = \ln c - 1 = \ln\frac{a+b}{2} - 1$$

例 35 已知 $f(x)$在$[a,b]$上连续，对任意$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，都有$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$，其中 M,δ 为正数，求证在$[a,b]$上，$f(x)\equiv 0$.

证 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，由题设，

$$\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}M|\Delta x|^{1+\delta}$$

$$= M|\Delta x|^\delta$$

由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0} M|\Delta x|^\delta = 0$，故有

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = 0$$

由 x 的任意性及 $F'(x)=f(x)$，故有 $f(x)\equiv 0$.

例 36 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx = 0$，

$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$，试证：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1$，$\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证 1 令$F(x) = \int_0^{x} f(x)\mathrm{d}x$，由$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，得$F(\pi)=0$，$F(0)=0$. 又

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)$$
$$= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin x\cdot F(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x = 0$$

若在$(0,\pi)$内$F(x)$没有为零的点，则在$(0,\pi)$内$F(x)$不变号，又$\sin x$也不变号，故

$$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x \neq 0$$

矛盾. 因此，$\exists\ c\in(0,\pi)$，使$F(c)=0$. 根据洛尔定理，$\exists\ \xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,\pi)$，使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

即
$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$$

证 2 因为$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，则$\exists\ \xi_1\in(0,\pi)$，使$f(\xi_1)=0$，否则$f(x)$在$(0,\pi)$内不变号，与$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$矛盾. 又必存在$\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_2\neq\xi_1$，使$f(\xi_2)=0$，若不然，在$(0,\xi_1)$与$(\xi_1,\pi)$内$f(x)$应反号，不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$，在$(\xi_1,\pi)$内$f(x)<0$，故

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x - \cos\xi_1\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\mathrm{d}x + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\mathrm{d}x$$
$$> 0$$

矛盾，故得证.

例 37 设 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个相异实根 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，试证：

(1) $p'(x_1)>0$，$p'(x_2)<0$，$p'(x_3)>0$；

(2)若 $\int_{x_1}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x>0$，则存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $\int_{\xi}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x=0$.

证 (1) 由题设有

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$p'(x)=(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)$$

又由于 $x_1<x_2<x_3$，故

$$p'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)>0$$

$$p'(x_2)=(x_2-x_1)(x_2-x_3)<0$$

$$p'(x_3)=(x_3-x_1)(x_3-x_2)>0$$

(2) 令 $F(x)=\int_{x}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x$，则 $F(x)$ 是连续函数，由于

$$F(x_1)=\int_{x_1}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x>0,\quad F(x_2)=\int_{x_2}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x<0$$

根据介值定理，$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使 $F(\xi)=0$，即

$$\int_{\xi}^{x_3}p(x)\mathrm{d}x=0$$

例 38 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负可导函数，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明在 $(0,1)$ 内存在惟一的 ξ，使 $\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

证 令 $F(t)=t\int_{1}^{t}f(x)\mathrm{d}x$

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 可导，又

$$F(0)=0,\ F(1)=0$$

由洛尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\left.\left(\int_{1}^{t}f(x)\mathrm{d}x+tf(t)\right)\right|_{t=\xi}=0$$

$$\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

由 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，有

$$xf'(x)+2f(x)>0$$

$$F''(t)=f(t)+f(t)+tf'(t)=2f(t)+tf'(t)>0$$

$F'(t)$单调增加，故 ξ 是惟一的.

例 39 设 $f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明在$[-a,a]$上至少存在一点 ξ，使 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

证 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2\right]\mathrm{d}x$

$=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x$ （ξ_1 在 0 与 x 之间）

$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x$

$f''(x)$在$[-a,a]$连续，故 $f''(x)$在$[-a,a]$上有最小值 m 与最大值 M，故

$$m\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x$$

$$m\leqslant\frac{\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x}{\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x}=\frac{3\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x}{2a^3}\leqslant M$$

由介值定理，$\exists\ \xi\in[-a,a]$，使

$$f''(\xi)=\frac{3\int_{-a}^{a}f''(\xi_1)x^2\mathrm{d}x}{2a^3}=\frac{3\times2\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x}{2a^3}$$

即 $$a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

例 40 估计 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x$ 的符号.

解 令 $x^2=t$，则

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad (\text{第二个积分令 } u=t-\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{\pi+u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{\pi+t}}\right)\sin t\mathrm{d}t$$

>0

例 41 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$，试证：$\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.

证 令 $\mathrm{e}^t=u$，则

$$|f(x)|=\left|\int_x^{x+1}\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{1}{u}\mathrm{d}\cos u\right|$$

$$=\left|\frac{1}{u}\cos u\Big|_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}+\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u\right|$$

$$=\left|\frac{\cos\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1}}-\frac{\cos\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\cos\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1}}\right|+\left|\frac{\cos\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right|+\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{u}\Big|_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}=\frac{2}{\mathrm{e}^x}$$

故 $\quad \mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$

例 42 已知 n 为正整数，证明当 n 充分大时

$$0<\int_0^1\pi\left[\sqrt{3}x(1-x)\right]^n\sin\pi x\mathrm{d}x<1$$

证 令 $f(x)=\left[\sqrt{3}x(1-x)\right]^n \qquad x\in[0,1]$

$$f'(x)=n\left[\sqrt{3}x(1-x)\right]^{n-1}\sqrt{3}(1-2x)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $x<\frac{1}{2}$，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$，$f'(x)<0$，故 $f\left(\frac{1}{2}\right)$是极大值也是最大值. 当 n 充分大时，

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n<\frac{1}{2}$$

又当 $x\in(0,1)$，$\pi\sin\pi x>0$，$f(x)>0$，故

$$0<\int_0^1\pi[\sqrt{3}x(1-x)]^n\sin\pi x\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\int_0^1\pi\sin\pi x\mathrm{d}x=1$$

例 43 证明：

$$\frac{\pi}{4}(a+b)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

证 $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x$$

$$\xrightarrow[\text{令 } t=\frac{\pi}{2}-x]{\text{第二个积分}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}+\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\right)\mathrm{d}x$$

令 $f(x)=\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}+\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

$$f'(x)=\frac{(b^2-a^2)\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}+\frac{(a^2-b^2)\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}$$

$$=(b^2-a^2)\sin x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}-\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}\right)$$

$$=[(b^2-a^2)^2\sin x\cos x(\cos^2x-\sin^2x)]\Big/\left[\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\cdot\left(\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}+\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\right)\right]$$

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$单调增，故

$$f(0)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

而 $\quad f(0)=a+b,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

故 $$\frac{\pi}{4}(a+b)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

即 $$\frac{\pi}{4}(a+b)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

例 44 设 a，$b>1$，证明 $ab\leqslant \mathrm{e}^{a-1}+b\ln b$.

证 由 $$\int_0^{a-1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{a-1}-1$$

有 $$\mathrm{e}^{a-1}=1+\int_0^{a-1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

由 $$\int_1^b\ln x\mathrm{d}x=b\ln b-(b-1)$$

有 $$b\ln b=(b-1)+\int_1^b\ln x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{e}^{a-1}+b\ln b=b+\int_0^{a-1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\int_1^b\ln x\mathrm{d}x$$

由于 $\int_0^{a-1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 与 $\int_1^b\ln x\mathrm{d}x$ 分别为图 11 中区域 D_1 与 D_2 的面积，因此

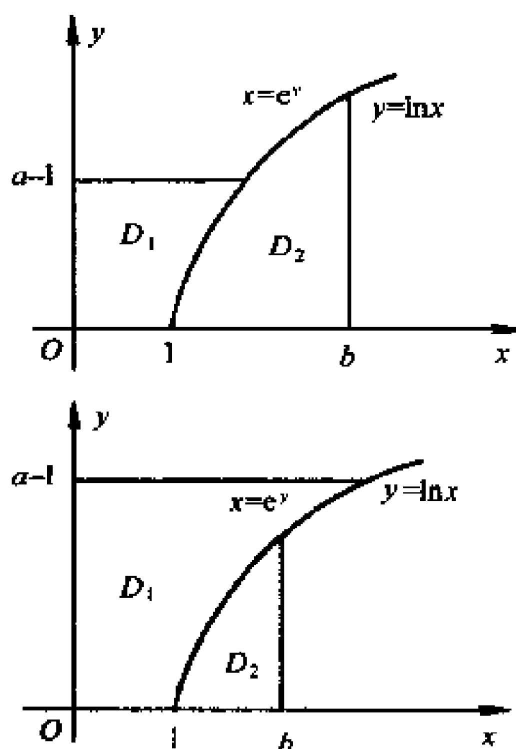


图 11

有

$$\int_0^{a-1} e^y dy + \int_1^b \ln x dx \geqslant b(a-1) = ab - b$$

故　　$e^{a-1}+b\ln b \geqslant b+ab-b=ab$

例 45　设 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续且单调减少，$f(1)>0$，求证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

并给予物理解释.

证　令 $F(t) = \int_0^t f^2(x)dx\int_0^t xf(x)dx - \int_0^t f(x)dx\int_0^t xf^2(x)dx$

$$F'(t) = f^2(t)\int_0^t xf(x)dx + tf(t)\int_0^t f^2(x)dx -$$

$$f(t)\int_0^t xf^2(x)dx - tf^2(t)\int_0^t f(x)dx$$

$$= f(t)\int_0^t f(x)(f(x)-f(t))(t-x)dx$$

由于 $f(t)$ 单调减少，且 $f(1)>0$，故当 $t\in[0,1]$，$f(t)>0$，且 $f(x)-f(t)\geqslant 0$，$t-x\geqslant 0$，故 $F'(t)\geqslant 0$，$F(t)$ 单调增加，又 $F(0)=0$，故 $F(t)\geqslant 0$，$F(1)\geqslant 0$，即

$$\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 xf^2(x)dx \geqslant 0$$

因此　　$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

此不等式可以改写成

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 f^2(x)dx} \leqslant \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

故可作物理解释如下：位于[0,1]区间上的长度为1，线密度为$f^2(x)$的细杆的质心坐标小于或等于长度为1，线密度为$f(x)$的细杆的质心坐标.

例46 设$f''(x)>0$，$x\in[a,b]$，试证

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

证 在x与$\frac{a+b}{2}$之间存在ξ，使

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\\&\quad\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

设y_{AB}为连接$A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$的弦，由于$f''(x)>0$，曲线$y=f(x)$是凹弧，故有

$$y_{AB}=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\geqslant f(x)$$

故
$$\begin{aligned}&\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x\\&=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

例47 设$f(x)$在[0,1]上可导，$|f'(x)|<M$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$$

证 将$[0,1]n$等分，则

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|f'(\xi_k)\left(x-\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\quad\left(\xi_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right)$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}$$

例 48 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

证 1 利用柯西不等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sqrt{f(x)}\right)^2\mathrm{d}x\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\,\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b\mathrm{d}x\right)^2=(b-a)^2$$

证 2 令$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\int_a^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-(t-a)^2$

$$F'(t)=f(t)\int_a^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(t)}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-2(t-a)$$

$$=\int_a^t\frac{f^2(t)+f^2(x)}{f(x)f(t)}\mathrm{d}x-2(t-a)$$

$$\geqslant\int_a^t 2\mathrm{d}x-2(t-a)=0$$

故 $F(x)$ 单调增加，又 $F(a)=0$，故当 $t\geqslant a$，$F(t)\geqslant 0$，特别，$F(b)\geqslant 0$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$$

例 49 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \left[\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\right]^2$$

证 根据柯西不等式

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\\
=&\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\sqrt{\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\
=&\left[\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\right]^2
\end{aligned}$$

例 50 设 $f(x)$ 连续且单调增加，$f(0)>0$，证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}$$

证 $2\sqrt{f(0)f(1)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{f(x)}}$

$$\begin{aligned}
&=2\sqrt{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(f(0)f(1)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)}\\
&\leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+f(0)f(1)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\\
&=\int_0^1\left[f(x)+\frac{f(0)f(1)}{f(x)}-f(0)-f(1)\right]\mathrm{d}x+f(0)+f(1)\\
&=\int_0^1 \frac{(f(x)-f(0))(f(x)-f(1))}{f(x)}\mathrm{d}x+f(0)+f(1)\\
&\leqslant f(0)+f(1) \qquad \text{（用到 } f(x) \text{ 单调增加）}
\end{aligned}$$

故有 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}$$

例 51 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$均为$[a,b]$上正值可积函数$(0<a<b)$，证明

$$\int_a^b [f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)]^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\left[\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\cdots\left[\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$

其中 n 为自然数.

证 由于

$$\frac{\int_a^b [f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)]^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x}{\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\left[\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\cdots\left[\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\int_a^b \left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x}\cdot\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x}\cdot\cdots\cdot\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b \frac{1}{n}\left[\frac{f_1(x)}{\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x}+\frac{f_2(x)}{\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{f_n(x)}{\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x}+\frac{\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x}\right]$$

$$=\frac{n}{n}=1$$

故得证.

例 52 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)$在$[a,b]$上可积，$f(a)=f(b)=0$，试证

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x \qquad (a<x<b)$$

证 $f(x)=\int_{a}^{x}f'(x)\mathrm{d}x+f(a)=\int_{a}^{x}f'(x)\mathrm{d}x$

$$f(x)=\int_{0}^{x}f'(x)\mathrm{d}x+f(b)=\int_{0}^{x}f'(x)\mathrm{d}x$$

故 $$|f(x)|=\left|\frac{1}{2}\int_{a}^{x}f'(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\frac{1}{2}\int_{b}^{x}f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_{a}^{x}|f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{x}^{b}|f'(x)|\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}|f'(x)|\mathrm{d}x$$

例 53 设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$ 上非负可积，且 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x=0$，求证 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

证 由题设，对任意 k，有

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x+k\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{a}}^{a}(x^2+kx-1)f(x)\mathrm{d}x$$

令 $g(x)=x^2+kx-1$，则当 $k=\frac{1}{a}-a$ 时有 $g(a)=g\left(-\frac{1}{a}\right)=0$，故在 $\left[-\frac{1}{a},a\right]$ 上 $g(x)\leqslant0$，又 $f(x)\geqslant0$，故有

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}g(x)f(x)\mathrm{d}x\leqslant0$$

因此 $$\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

例 54 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，且导数连续，又对任意实数 x，有 $|f(x)+f'(x)|\leqslant1$，试证 $|f(x)|\leqslant1$.

证 令 $F(x)=\mathrm{e}^xf(x)$，则

$$F'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$$

故$|F'(x)|\leqslant e^x$，即$-e^x\leqslant F'(x)\leqslant e^x$.

$$\int_{-\infty}^{x} -e^x dx \leqslant \int_{-\infty}^{x} F'(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{x} e^x dx$$

即 $\quad -e^x\leqslant F(x)\Big|_{-\infty}^{x}=e^x f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} e^x f(x)=e^x f(x)\leqslant e^x$

故$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，即$|f(x)|\leqslant 1$.

例 55 设$f(0)=1$，$f'(x)=\dfrac{1}{e^x+|f(x)|}\quad(x\geqslant 0)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，试证：$\sqrt{2}\leqslant A\leqslant 1+\ln 2$.

证 由已知，有

$$A-1=\int_0^{+\infty} f'(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+|f(x)|}dx$$

由于$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加，故当$x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant f(0)=1$，故

$$A-1\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$

$$A\leqslant 1+\ln 2$$

又由于$f(x)$单调增加，故$|f(x)|=f(x)\leqslant A$.

$$A-1\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+A}\xlongequal{\text{令 } e^x=t}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{At+t^2}$$

$$\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{dt}{At^2+t^2}=\frac{1}{A+1}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{A+1}$$

即 $\quad (A+1)(A-1)\geqslant 1,\quad A^2-1\geqslant 1,\quad A\geqslant\sqrt{2}$

例 56 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)dx=0$，$\int_0^1 xf(x)dx=0$，…，$\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=0$，$\int_0^1 x^n f(x)\,dx=1$，证明：存在$c\in[0,1]$，使$|f(c)|\geqslant 2^n(n+1)$.

证 设 $\quad I=\int_0^1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n f(x)dx$

若在$[0,1]$上恒有$|f(x)|<2^n(n+1)$，则

$$I \leqslant \int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^n f(x) \right| \mathrm{d}x < 2^n(n+1) \int_0^1 \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^n \right| \mathrm{d}x$$

$$= 2^n(n+1) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x \right)^n \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^n \mathrm{d}x \right]$$

$$= 2^n(n+1) \left[\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right] = 1$$

另一方面，由题意有

$$I = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \int_0^1 x^k \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-k} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x = 1$$

矛盾. 故$\exists\ c \in [0,1]$，使$|f(c)| \geqslant 2^n(n+1)$.

例 57 设 $f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，则对任意 $\xi \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$，$\eta \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$，有

$$|f'(x)| \leqslant 3|f(\xi) - f(\eta)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

证 根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \theta \in (\xi, \eta)$使

$$f(\xi) - f(\eta) = f'(\theta)(\xi - \eta)$$

故 $|f'(x)| - |f'(\theta)| \leqslant |f'(x) - f'(\theta)|$

$$= \left| \int_\theta^x f''(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

因此 $|f'(x)| \leqslant |f'(\theta)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$

$$= \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|} + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{1/3} + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

$$= 3|f(\xi) - f(\eta)| + \int_0^1 |f''(x)| \mathrm{d}x$$

例 58 设 $f'(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leqslant \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| + \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$$

证 设 $x_0 \in [a,b]$，使$|f(x_0)| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$，根据积分中值

定理，$\exists\ \xi\in[a,b]$，使

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$$

故 $$\max_{x\in[a,b]}|f(x)| = |f(x_0)-f(\xi)+f(\xi)|$$

$$\leqslant |f(\xi)| + |f(x_0)-f(\xi)|$$

$$= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\xi^{x_0} f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

例 59 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$$

证 令 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$，根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\xi_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，使

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(0)+f'(\xi_1)x|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(1)+f'(\xi_2)(x-1)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(\xi_1)x|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(\xi_2)(x-1)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x + M\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{M}{8} + \frac{M}{8} = \frac{M}{4} = \frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$$

例 60 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\ (x>0)$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

解 $y=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k=0,1,2,\cdots$

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\pi y^2\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-4k\pi}}{5}(\mathrm{e}^{-2\pi}+1)$$

$$=\frac{\pi(\mathrm{e}^{-2\pi}+1)}{5}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-\mathrm{e}^{-2\pi})}$$

例 61 试计算由曲线 $x^2-y^2=2$, $x+y=\sqrt{2}$, $x+y=3\sqrt{2}$ 及 $y=x$ 围成的图形绕直线 $y=x$ 旋转而成的立体体积.

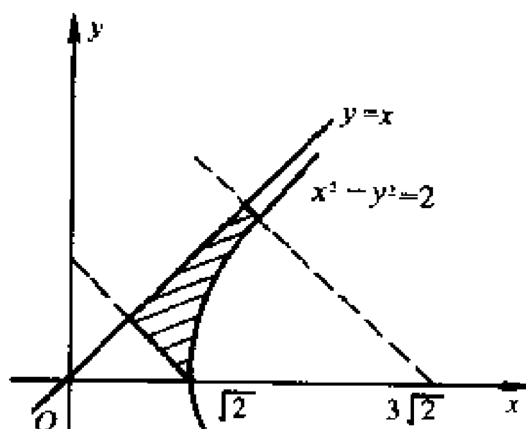


图 12

解 将坐标系逆时针旋转 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 使 $y=x$ 变成 u 轴，即令

$$\begin{cases}x=u\cos\frac{\pi}{4}-v\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)\\ y=u\sin\frac{\pi}{4}+v\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\end{cases}$$

则已知曲线分别变成

$$uv=-1,\quad u=1,\quad u=3,\quad v=0$$

故 $\quad V=\int_1^3\pi v^2\mathrm{d}u=\int_1^3\pi\left(-\frac{1}{u}\right)^2\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\pi$

例 62 设曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、y 轴所围图形的

面积被曲线 $y=a\sin x$，$y=b\sin x(a>b>0)$ 三等分，试确定 a，b 的值.

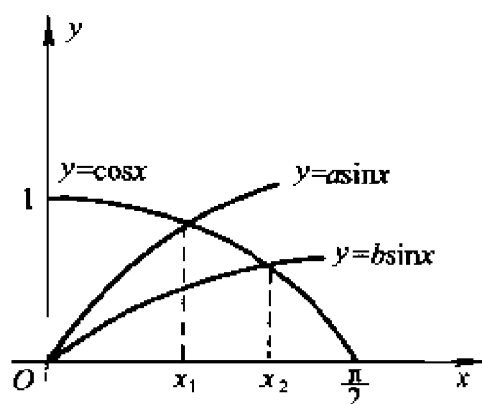


图 13

解 如图 13，设曲线 $y=a\sin x$，$y=b\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交点分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，即

$$\cos x_1 = a\sin x_1,\ \cos x_2 = b\sin x_2$$

$$\tan x_1 = \frac{1}{a},\ \tan x_2 = \frac{1}{b}$$

由题意

$$\begin{cases}\int_0^{x_1}(\cos x - a\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{x_1} a\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x \\ \int_0^{x_1}(\cos x - a\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\end{cases}$$

积分并整理得

$$\begin{cases}2\sin x_1 + 2a\cos x_1 - 2a = \sin x_2 + b\cos x_2 - b \\ \sin x_1 + a\cos x_1 - a = -b\cos x_2 - \sin x_2 + b + 1\end{cases}$$

由
$$\tan x_1=\frac{1}{a},\ \tan x_2=\frac{1}{b}$$

有
$$\sin x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad \cos x_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\sin x_2 = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}},\quad \cos x_2 = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

故
$$\begin{cases}2\sqrt{1+a^2}-2a=\sqrt{1+b^2}-b \\ \sqrt{1+a^2}-a=b+1-\sqrt{1+b^2}\end{cases}$$

解得
$$a=\frac{4}{3},\quad b=\frac{5}{12}$$

例 63 设 $f(x)=\int_{-1}^{x} t|t|\mathrm{d}t\ (x\geqslant -1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积.

解 首先求 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点，由于 $t|t|$ 是奇函数，故 $f(x)$ 是偶函数. 又 $f(-1)=0$，故 $f(1)=0$. 由于

$$f'(x)=x|x|$$

当 $-1<x<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；当 $x>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，故在 $[-1,+\infty)$，$f(x)$ 最多只有两个零点，因此

$$A=2\left|\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x\right|=2\left|\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{x}-t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=2\left|\int_{-1}^{0}-\frac{1}{3}(1+x^3)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}$$

例 64 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，试计算 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$

$$\rho=\rho(x)=\frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}$$

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\rho=3(4x+1)^{1/2}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\mathrm{d}x=\frac{(4x+1)^{1/2}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{3(4x+1)^{1/2}\mathrm{d}x}{\dfrac{(4x+1)^{1/2}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}=6\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(6\sqrt{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(6\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}}\frac{2\sqrt{x}}{(4x+1)^{1/2}}=\frac{6}{(4x+1)^{1/2}}$$

$$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$=3\times\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}\frac{6}{(4x+1)^{1/2}}-(6\sqrt{x})^2=9$$

例 65 一半椭球形水池深为 b，池口是半径为 a 的圆，若以每秒 v 单位的速度向池内注水，求水深增加的速度与水深的关系.

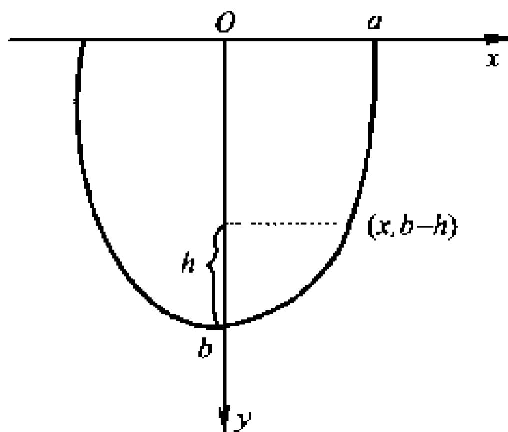


图 14

解 如图 14 建立坐标系，设水深为 h 时水面圆的半径为 x，则有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(b-h)^2}{b^2}=1$$

此时池中水量增量微元为

$$\mathrm{d}Q=\pi x^2\mathrm{d}h$$

$$Q=\int_0^h\pi x^2\mathrm{d}h=\int_0^h\pi a^2\left(1-\frac{(b-h)^2}{b^2}\right)\mathrm{d}h$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\pi a^2\left(1-\frac{(b-h)^2}{b^2}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

由于$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=v$，故有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\pi a^2\left(1-\frac{(b-h)^2}{b^2}\right)}=\frac{vb^2}{\pi a^2h(2b-h)}$$

例 66 设质点在时间 $t=0$ 时开始作直线运动，至 $t=1$ 时停止，其间走过路程 1，试证必有某一时刻 t 的加速度的绝对值大于等于 4.

证 设路程函数为 $s=s(t)$. 则加速度为 $s''(t)$，由题意

$$s'(0)=s'(1)=0$$

且 $$1=s(1)-s(0)=\int_0^1 s'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 s'(t)\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)s'(t)\Big|_0^1-\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)s''(t)\mathrm{d}t$$
$$=-\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)s''(t)\mathrm{d}t$$

若当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时恒有 $|s''(t)|<4$，则

$$1=\left|\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)s''(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_0^1\left|t-\frac{1}{2}\right||s''(t)|\mathrm{d}t<4\int_0^1\left|t-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}t$$
$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\mathrm{d}t+4\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=1$$

矛盾. 故必有某一时刻 t 的加速度的绝对值大于等于 4.

例 67 求证：内切于一给定正方形的所有椭圆中，以圆的周长为最大.

解 显然椭圆的轴应在正方形的对角线上. 如图 15 建立坐标系，设正方形四条边的方程为

$|x|+|y|=c$ （c 是常数）

椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b\leqslant a<c)$$

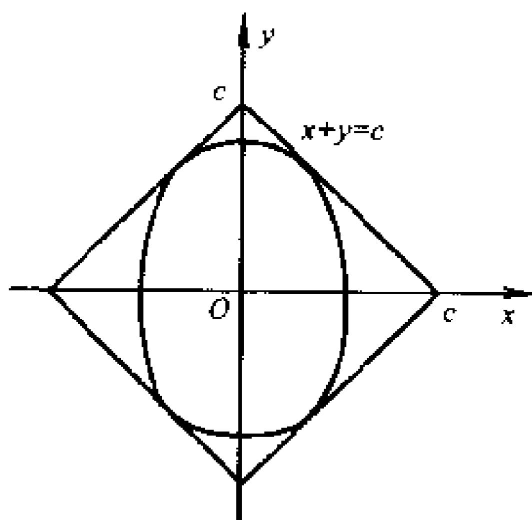


图 15

在第一象限，切点满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ x+y=c\end{cases}$$

消去 y 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(c-x)^2}{b^2}=1$$

即 $$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+(a^2c^2-a^2b^2)=0$$

由于解惟一，故

$$\Delta=(-2a^2c)^2-4(a^2+b^2)(a^2c^2-a^2b^2)$$
$$=4a^2b^2(a^2+b^2-c^2)=0$$

得 $$a^2+b^2=c^2$$

椭圆的参数方程为 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$. 设椭圆长为 $4L$，则

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\frac{1-\cos2t}{2}+b^2\frac{1+\cos2t}{2}}\mathrm{d}t \quad (\text{记 } A=a^2-b^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{c^2-A\cos2t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{c^2-A\cos2t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{c^2-A\cos2t}\mathrm{d}t$$

$$(\text{令 } 2t=\pi-2u)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{c^2-A\cos2t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{c^2+A\cos2u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{c^2-A\cos2t}+\sqrt{c^2+A\cos2t}\right)\mathrm{d}t$$

令 $$f(A)=\sqrt{c^2-A\cos2t}+\sqrt{c^2+A\cos2t} \quad (A\geqslant0)$$

$$f'(A)=-\frac{\cos2t}{2\sqrt{c^2-A\cos2t}}+\frac{\cos2t}{2\sqrt{c^2+A\cos2t}}$$

当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$\cos2t>0$，故 $f'(A)<0$，$f(A)$单调减少，因此

$$f(A)_{\max}=f(0)$$

故当 $A=0$ 时，积分值最大，即 L 最大. 因此当 $a^2=b^2$，$a=b$ 时，即椭圆为圆时，$4L$ 最大.

例68 由于折旧等因素，某机器转售价格 $R(t)$ 是时间 t（周）的减函数 $R(t)=\frac{3A}{4}e^{-t/96}$（元），其中 A 是机器的最初价格，在任何时间 t，机器开动就能产生 $P=\frac{A}{4}e^{-t/48}$ 的利润. 问机器使用了多长时间后转售出去总利润最大？这利润是多少？机器卖了多少钱？

解 假设机器使用了 t 周后出售，在时间 $[t,t+dt]$ 内机器开动创造的利润为

$$Pdt = \frac{A}{4}e^{-t/48}dt$$

于是总收入为

$$f(t)=\frac{3A}{4}e^{-t/96}+\int_0^t \frac{A}{4}e^{-t/48}dt$$

$$f'(t)=\frac{3A}{4}\left(-\frac{1}{96}\right)e^{-t/96}+\frac{A}{4}e^{-t/48}$$

$$=\frac{A}{4}e^{-t/48}\left(-\frac{1}{32}e^{t/96}+1\right)$$

令 $f'(t)=0$，得 $t=96\ln 32\approx 333$. 当 $t<96\ln 32$，$f'(t)>0$；当 $t>96\ln 32$，$f'(t)<0$，故机器使用了 333 周后转售出去总利润最大，这最大总利润为

$$f(96\ln 32)-A$$

$$=\frac{3A}{4}e^{-\ln 32}+\frac{A}{4}\int_0^{96\ln 32}e^{-t/48}dt-A$$

$$=\frac{3}{128}A+12\left(1-\frac{1}{32^2}\right)A-A\approx 11.01A\ (\text{元})$$

而机器卖了 $\frac{3}{128}A$ 元.

第四章　多元函数微分学

一、内容要点

本章包括空间解析几何、多元函数微分学及其在几何、求极值中的应用.

求导数或偏导数的运算是很重要的运算. 求复合函数的导数或偏导数时重要的是弄清函数的结构，求隐函数的导数或偏导数时重要的是弄清在方程或方程组中出现的几个变量中，哪些是自变量，哪些是函数.

求多元函数的极值时，为了使求驻点的运算简单，要尽量使目标函数及约束条件的形式简单，为此有时要使用代换等手段.

二、例题选讲

例 1　设向量 $\boldsymbol{a}\perp\pi$（π 是平面），向量 $\boldsymbol{b}$ 在 π 内逆时针方向旋转 θ 角得 $\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$.

解　设 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{a}$，故 $\boldsymbol{d}$ 在平面 π 上，且 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{b}$，因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0\\ &= |\boldsymbol{c}|(\cos\theta\cdot\boldsymbol{b}^0+\sin\theta\cdot\boldsymbol{d}^0)\\ &= |\boldsymbol{b}|\left(\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+\sin\theta\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}\right)\end{aligned}$$

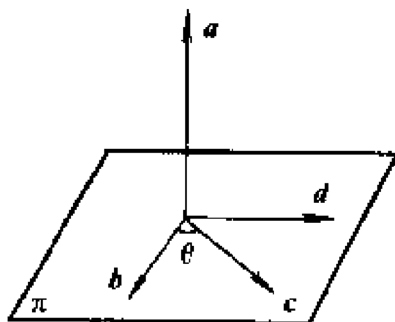


图 16

例 2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是三维空间中的两非零向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|}$$

$$=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}$$

$$=\frac{1}{2}$$

例 3 以 O 为圆心的单位圆上有相异两点 P、Q，向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，设 a，b 为正常数，求极限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}(|a\overrightarrow{OP}|+|b\overrightarrow{OQ}|-|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|)$$

解 设 $\overrightarrow{OP}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，则

$$\overrightarrow{OQ}=\{\cos(\alpha+\theta),\cos(\beta+\theta)\}$$

$$|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|$$

$$=|\{a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\theta),a\cos\beta+b\cos(\beta+\theta)\}|$$

$$=\sqrt{(a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\theta))^2-(a\cos\beta+b\cos(\beta+\theta))^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+2ab(\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)+\cos\beta\cos(\beta-\theta))}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

又 $|a\overrightarrow{OP}|=a$，$|b\overrightarrow{OQ}|=b$，故

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}(|a\overrightarrow{OP}|+|b\overrightarrow{OQ}|-|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}|)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2ab(1-\cos\theta)}{\theta^2(a+b+\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta})}$$

$$= \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2+2ab}} = \frac{ab}{2(a+b)}$$

例 4 已知直线 L_1：$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$，$L_2$：$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$，试求 L_1 与 L_2 的公垂线的方程.

解 设 L_1，L_2 及公垂线 L 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\boldsymbol{s}$，则由于

$$\boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s}_2 \perp \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \{4,-3,1\} \times \{-2,9,2\} = -5\{3,2,-6\}$$

可取 $\boldsymbol{s}=\{3,2,-6\}$. 由于

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s} = \{16,27,17\}$$

则过 L_1 与 L 的平面 π 的方程为

$$16(x-9)+27(y+2)+17z=0$$

即
$$16x+27y+17z-90=0$$

由
$$\begin{cases} 16x+27y+17z-90=0 \\ \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2} \end{cases}$$

解得 π 与 L_2 的交点 $(-2,2,4)$，此点也是 L 上的点，故 L 的方程为

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-6}$$

例 5 平面通过两直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{1}$ 和 L_2：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{2}$ 的公垂线 L，且平行于向量 $\boldsymbol{c}=\{1,0,-1\}$，试求此平面的方程.

解 设 L_1，L_2，L 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\boldsymbol{s}$ 所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$，

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \{1,2,1\} \times \{1,3,2\} = \{1,-1,1\} = \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{c} = \{1,-1,1\} \times \{1,0,-1\} = \{1,2,1\}$$

设 L 与 L_1，L_2 的交点分别为 A，B，则 A，B 可分别表示为

$$A(1+t,-2+2t,t+5),\quad B(\lambda,3\lambda-3,2\lambda-1)$$

$$\overrightarrow{AB}=\{\lambda-t-1,3\lambda-2t-1,2\lambda-t-6\}$$

由于 $\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{s}$，故

$$\frac{\lambda-t-1}{1}=\frac{3\lambda-2t-1}{-1}=\frac{2\lambda-t-6}{1}$$

解得 $t=6$，$\lambda=5$，故 $A(7,10,11)$，所求平面方程为

$$(x-7)+2(y-10)+(z-11)=0$$

即
$$x+2y+z-38=0$$

例 6 已知曲面

$$x^2-2y^2+z^2-4yz-8zx+4xy-2x+8y-4z-2=0$$

与某一平面的交线的对称中心在坐标原点，求该平面方程.

解 由题意，所求平面过原点，若该平面为 yOz 面，则此平面与曲面的交线为

$$\begin{cases}-2y^2+z^2-4yz+8y-4z-2=0\\ x=0\end{cases}$$

该曲线不关于原点对称，故 yOz 面不为所求. 设所求平面方程为

$$x+By+Cz=0$$

与曲面方程联立消去 x 得

$$(By+Cz)^2-2y^2+z^2-4yz-8z(-By-Cz)+$$
$$4y(-By-Cz)-2(-By-Cz)+8y-4z-2=0$$

即

$$(B^2-4B-2)y^2+(C^2+8C+1)z^2+2(BC+4B-$$
$$2C-2)yz+2(B+4)y+2(C-2)z-2=0 \qquad (1)$$

它与 $x=0$ 联立为曲面与平面的交线在 yOz 面上的投影曲线，该投影曲线必然也以原点为对称中心，故若在方程(1)中分别用 $-y$，$-z$ 替换 y，z，方程应保持不变，因此有

$$2(B+4)=0,\quad 2(C-2)=0$$

得 $B=-4$，$C=2$，故所求平面方程为

$$x - 4y + 2z = 0$$

例 7 试求过点 $A(-2,0,0)$和 $B(0,-2,0)$，且与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 交成抛物线的平面方程.

解 设 $\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$为平面的单位法向量，则由题意 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，由于

$$\overrightarrow{AB} = \{2, -2, 0\}$$

故
$$2a - 2b = 0, \quad a = b$$

又由于平面与锥面的交线为抛物线，故平面与 xOy 面成$\frac{\pi}{4}$角，因此

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|} = c = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

又由$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$得

$$\sqrt{2a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

解得 $a=b=\pm\frac{1}{2}$，故所求平面方程为

$$\pm\frac{1}{2}(x+2) \pm \frac{1}{2}(y-0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-0) = 0$$

即
$$x + y \pm \sqrt{2}z + 2 = 0$$

例 8 将边长为 6 的正方形 $ABCD$ 用平行于 AB 的线段 EF、GH 三等分(图 17(1))并折成正三棱柱，将此三棱柱放在空间直角坐标系中(图 17(2)).

(1) 求线段 PQ 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程；

(2) 过点 P、Q 分别作平行于 xOy 面的两平面，求此两平面与 (1) 中旋转曲面所围成的立体的体积.

解 (1) 由题设，$P(2,0,2)$,$Q(1,\sqrt{3},4)$，故 PQ 的方程为

$$x = 2 - t, \quad y = \sqrt{3}t, \quad z = 2 + 2t$$

设 $M(x,y,z)$是旋转曲面上任一点，它是由 PQ 上点

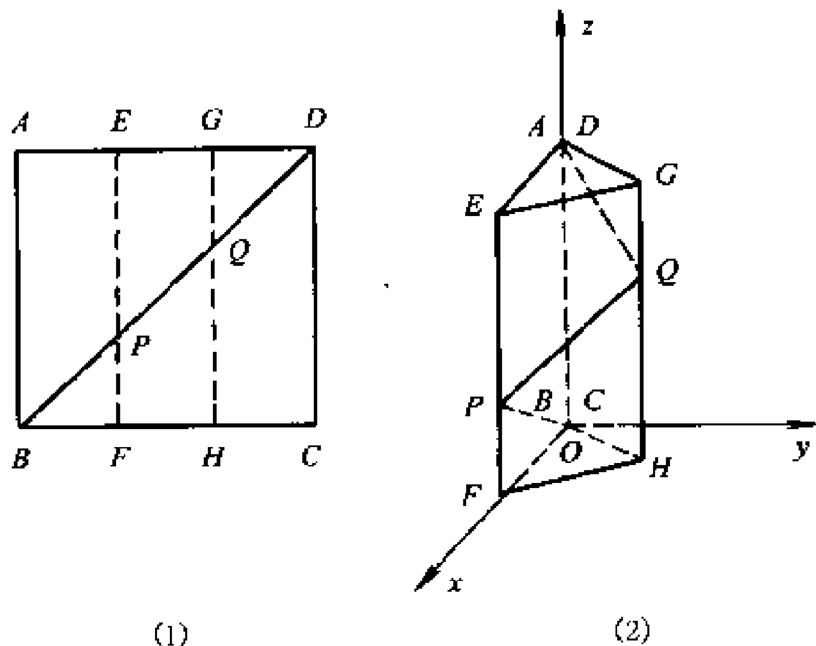


图 17

$M'(x',y',z')$绕 z 轴旋转而得的，则有

$$x^2+y^2=(x')^2+(y')^2,\quad z=z'$$

即
$$x^2+y^2=(2-t)^2+(\sqrt{3}t)^2,\quad z=2+2t$$

消去 t 得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-(z-3)^2=3$$

（2）设 $A(z)$是水平截面面积，则

$$V=\int_2^4 A(z)\mathrm{d}z=\int_2^4 \pi(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_2^4 (3+(z-3)^2)\mathrm{d}z=\frac{20}{3}\pi$$

例 9 试求顶点在原点，且三个坐标轴的正半轴都在其上的圆锥面方程.

解 由题意，点(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)都在圆锥面上，故曲线(圆)

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$$

是圆锥面的准线. 设 $M(x,y,z)$是圆锥面上任一点，它与准线的交点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则存在数 λ，使

$$\overrightarrow{OM_1}=\lambda\overrightarrow{OM}$$

即 $x_1=\lambda x$，$y_1=\lambda y$，$z_1=\lambda z$，由于点 M_1 在准线上，有

$$\begin{cases}(\lambda x)^2+(\lambda y)^2+(\lambda z)^2=1\\\lambda x+\lambda y+\lambda z=1\end{cases}$$

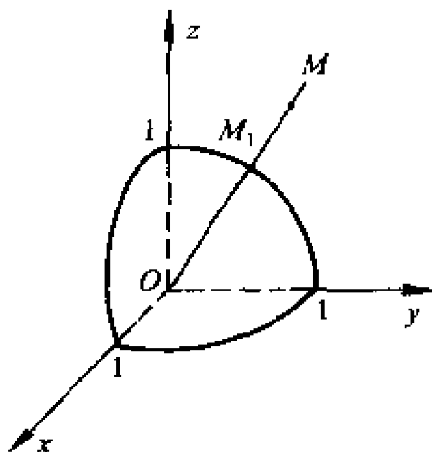


图 18

消去 λ 得

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$$

即

$$xy+yz+zx=0$$

此即为所求圆锥面方程.

例 10 已知椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (c<a<b)$$

试求过 x 轴且与椭球面的交线是圆的平面.

解 由于平面过 x 轴，且 $y=0$(zOx 面)不合题意，可设平面方程为

$$z=ky$$

它与椭球面的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\z=ky\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{c^2+b^2k^2}{b^2c^2}y^2=1\\z=ky\end{cases} \tag{1}$$

又由于交线圆的圆心在原点，且该圆过点$(a,0,0)$，与$(-a,0,0)$，

故该圆的方程也可以表示为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=ky \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{1+k^2}{a^2}y^2=1 \\ z=ky \end{cases} \tag{2}$$

比较(1)与(2)得

$$\frac{c^2+b^2k^2}{b^2c^2}=\frac{1+k^2}{a^2}$$

解得 $k=\pm\dfrac{c\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$，故所求平面方程为

$$c\sqrt{b^2-a^2}y\pm b\sqrt{a^2-c^2}z=0$$

例 11 试求通过三条直线：

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=0 \\ x+y-z=-2 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y-z=0 \end{cases}$$

的圆柱面方程.

解 三条已知直线的方向向量都是 $s=\{0,1,1\}$. 过原点且以 s 为法向量的平面 π 的方程为

$$y+z=0$$

平面 π 与三直线的交点分别为 $O(0,0,0)$，$A(0,-1,1)$，$B(\sqrt{2},0,0)$. 设平面 π 上过此三点的圆的圆心为 $C(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2} \\ \qquad\qquad\qquad\;=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2} \\ y+z=0 \end{cases}$$

解得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=-\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}$$

故 $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，因此圆柱面的轴线方程为

$$L: \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{y+\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$$

又 $$OC=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

故圆柱面的半径为 1.

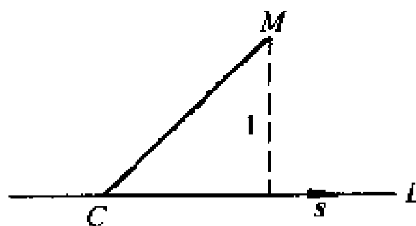


图 19

设 $M(x,y,z)$是圆柱面上任一点，则它到直线 L 的距离为 1，根据图 19 得

$$\frac{|\overrightarrow{MC}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

$$=\frac{\left|\left\{x-\frac{\sqrt{2}}{2},y+\frac{1}{2},z-\frac{1}{2}\right\}\times\{0,1,1\}\right|}{|\{0,1,1\}|}=1$$

$$\frac{\left|\left\{y-z+1,-x+\frac{\sqrt{2}}{2},x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right|}{\sqrt{2}}=1$$

$$\sqrt{(y-z+1)^2+\left(-x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$2x^2+y^2+z^2-2yz-2\sqrt{2}x+2y-2z=0$$

此即为所求圆柱面的方程.

例 12 设函数 $u(x,y)$有二阶连续偏导数，满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{x^2}(x,2x)$.

解 $u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导得

$$u'_x(x,2x)+2u'_y(x,2x)=1$$

将 $u'_x(x,2x)=x^2$ 代入得

$$u'_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$$

两边对 x 求导得

$$u''_{yx}(x,2x)+2u''_{y^2}(x,2x)=-x$$

由$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$得

$$u''_{yx}(x,2x)+2u''_{x^2}(x,2x)=-x$$

$$u''_{yx}(x,2x)=-x-2u''_{x^2}(x,2x)$$

由 $u'_x(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导得

$$u''_{x^2}(x,2x)+2u''_{xy}(x,2x)=2x$$

$$\begin{aligned}u''_{x^2}(x,2x)&=-2x-2u''_{xy}(x,2x)\\&=2x-2u''_{yx}(x,2x)\\&=2x-2(-x-2u''_{x^2}(x,2x))\\&=4x+4u''_{x^2}(x,2x)\end{aligned}$$

解得
$$u''_{x^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$$

例 13 已知函数 $z=f(x,y)$有连续的二阶偏导数，且 $f'_x(x,y)\neq 0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$，又设 $x=x(y,z)$是由 $z=f(x,y)$确定的函数，求

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2$$

解 由于 $x=x(y,z)$是由 $z=f(x,y)$确定的，因此求$\frac{\partial x}{\partial y}$与$\frac{\partial x}{\partial z}$等偏导数的运算都要利用隐函数的求导方法，要将 y 与 z 看成无关的.

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

两边对 y 求偏导

$$0=f'_x\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+f'_y$$

解得
$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_x} \tag{2}$$

(1)两边对 z 求偏导

$$1 = f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{f'_x} \tag{3}$$

由(2)对 y 求偏导，并将(2)代入得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{(f''_{yx}\frac{\partial x}{\partial y} + f''_{y^2})f'_x - f'_y(f''_{x^2}\frac{\partial x}{\partial y} + f''_{xy})}{-(f'_x)^2}$$

$$= \frac{2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y - f''_{y^2} \cdot (f'_x)^2 - f''_{x^2} \cdot (f'_y)^2}{(f'_x)^3}$$

由(3)对 z 求偏导，并将(3)代入得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{-f''_{x^2}\frac{\partial x}{\partial z}}{(f'_x)^2} = \frac{-f''_{x^2}}{(f'_x)^3}$$

由(2)对 z 求偏导，并将(3)代入得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{f''_{yx} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot f'_x - f'_y \cdot f''_{x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial z}}{-(f'_x)^2}$$

$$= \frac{f''_{x^2} \cdot f'_y - f''_{xy} \cdot f'_x}{(f'_x)^3}$$

由已知条件 $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = 0$，故

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}\right)^2$$

$$= \{[2f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y - f''_{y^2} \cdot (f'_x)^2 - f''_{x^2} \cdot (f'_y)^2] \times (-f''_{x^2}) - (f''_{x^2} \cdot f'_y - f''_{xy} \cdot f'_x)^2\}/(f'_x)^6$$

$$= \frac{f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} \cdot (f'_x)^2 - (f''_{xy})^2 (f'_x)^2}{(f'_x)^6}$$

$$= 0$$

例 14 设 $f(x,y,z) = F(u,v,w)$，且 $x^2 = vw$，$y^2 = uw$，$z^2 = uv(u,v,w > 0)$，试证

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w}$$

证 1 由于$(xt)^2=(vt)(wt)$，$(yt)^2=(ut)(wt)$，$(zt)^2=(ut)\cdot(vt)$，故有

$$f(xt,yt,zt)=F(ut,vt,wt)$$

两边对 t 求导得

$$f_1'\cdot x+f_2'\cdot y+f_3'\cdot z=F_1'\cdot u+F_2'\cdot v+F_3'\cdot w$$

两边乘以 t 并分别用 x，y，z，u，v，w 替换 xt，yt，zt，ut，vt，wt 得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}$$

证 2 由 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$得

$$\begin{cases}f_x'=F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}+F_w'\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ f_y'=F_u'\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial y}+F_w'\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ f_z'=F_u'\dfrac{\partial u}{\partial z}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial z}+F_w'\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&xf_x'+yf_y'+zf_z'\\&=F_u'\cdot\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F_v'\cdot\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\\&\quad F_w'\cdot\left(x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}\tag{1}$$

$x^2=vw$，$y^2=uw$，$z^2=uv$ 两边分别取全微分得

$$\begin{cases}2x\mathrm{d}x=v\mathrm{d}w+w\mathrm{d}v\\2y\mathrm{d}y=u\mathrm{d}w+w\mathrm{d}u\\2z\mathrm{d}z=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u\end{cases}$$

解得

$$\mathrm{d}u=\frac{-xu\mathrm{d}x+yv\mathrm{d}y+zw\mathrm{d}z}{vw}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{xu\mathrm{d}x-yv\mathrm{d}y+zw\mathrm{d}z}{uw}$$

$$\mathrm{d}w=\frac{xu\mathrm{d}x+yv\mathrm{d}y-zw\mathrm{d}z}{uv}$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu}{vw},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{yv}{vw},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{zw}{vw}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xu}{uw},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{yv}{uw},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{zw}{uw}$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{xu}{uv},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{yv}{uv},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{zw}{uv}$$
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\left(-\frac{xu}{vw}\right)+y\frac{yv}{vw}+z\frac{zw}{vw}$$
$$=\frac{-x^2u+y^2v+z^2w}{vw}$$
$$=\frac{-vwu+uwv+uvw}{vw}=u$$
同理
$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=v$$
$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=w$$
代入(1)得
$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w$$
即
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}$$

例 15 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数.
$$u=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\ f''_{11}+f''_{22}=\frac{1}{r}$$
求 $r\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ 的值.

解 由已知条件得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\int_0^{2\pi}(f'_1\cdot\cos\theta+f'_2\cdot\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}=\int_0^{2\pi}(f''_{11}\cdot\cos^2\theta+2f''_{12}\cdot\sin\theta\cos\theta+f''_{22}\cdot\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \int_0^{2\pi} f_1' \mathrm{d}\sin\theta - \int_0^{2\pi} f_2' \mathrm{d}\cos\theta$

$$= f_1' \cdot \sin\theta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} [f_{11}'' \cdot (-r\sin\theta) + f_{12}'' \cdot r\cos\theta] \sin\theta \mathrm{d}\theta -$$

$$f_2' \cdot \cos\theta \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} [f_{21}''(-r\sin\theta) + f_{22}'' \cdot r\cos$$ [illegible]

$b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 中的常数 a 和 b.

解 由题意 $g(u,v)=f\left(uv,\frac{1}{2}(u^2-v^2)\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}=f_1'\cdot v+f_2'\cdot u$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=f_1'\cdot u+f_2'\cdot(-v)$$

因此有

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\\&=a[v^2(f_1')^2+u^2(f_2')^2+2uvf_1'\cdot f_2']-b[u^2(f_1')^2+\\&\quad v^2(f_2')^2-2uvf_1'\cdot f_2']\\&=(av^2-bu^2)(f_1')^2+(au^2-bv^2)(f_2')^2+2uv(a+b)f_1'\cdot f_2'\\&=u^2+v^2\end{aligned}$$

利用 $(f_1')^2+(f_2')^2=4$，即 $(f_2')^2=4-(f_1')^2$ 得

$$\begin{aligned}&(a+b)(v^2-u^2)(f_1')^2+2(a+b)uvf_1'\cdot f_2'+4au^2-4bv^2\\&=u^2+v^2\end{aligned}$$

由此得 $$a+b=0,\ 4a=1,\ -4b=1$$

故 $$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$$

例 18 设 $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, $w=ze^y$, 取 u、v 为新自变量, $w=w(u,v)$ 为新函数，假定 $w(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$$

为新变量的形式.

解 6 个变量构成的函数结构图如图 20. 由

$$w=ze^y$$

有 $$z=we^{-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-y}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)e^{-y}$$

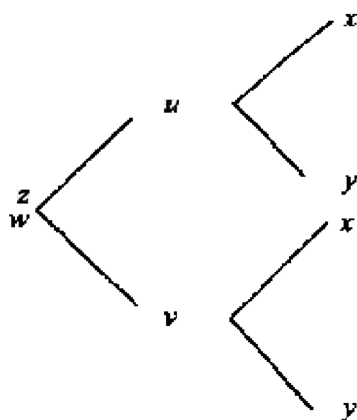


图 20

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-y}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)e^{-y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)(-e^{-y})$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)e^{-y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)e^{-y}$$

代入已知方程得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$$

例 19 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$具有一阶连续偏导数，作变换 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，证明

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\end{cases}$$

证 由题意

$$u=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\quad v=v(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi)+\dfrac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi\\ \dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\varphi)+\dfrac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi\end{cases}\tag{1}$$

$\Rightarrow$将$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$代入(1)得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

$\Leftarrow$由于$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$，利用(1)得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi=\dfrac{1}{r}\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}r\sin\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi=-\dfrac{1}{r}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\right)\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\varphi+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\varphi=0\\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\varphi+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\varphi=0\end{cases}$$

由于$\cos\varphi$，$\sin\varphi$线性无关，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\quad\frac{\partial v}{\partial x}$$

例 20 设$\triangle ABC$的外接圆半径为一定值，且$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边长分别为a，b，c，试证明

$$\frac{\mathrm{d}a}{\cos A}+\frac{\mathrm{d}b}{\cos B}+\frac{\mathrm{d}c}{\cos C}=0$$

证 如图 21，设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，圆心为O，则由于

$\angle A=\angle D$（同弧上圆周角）

有　$\sin A=\sin D=\dfrac{a}{BD}=\dfrac{a}{2R}$

$$a=2R\sin A$$

同理　$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

因此　$\mathrm{d}a=2R\cos A\mathrm{d}A$

$$\mathrm{d}b=2R\cos B\mathrm{d}B,\ \mathrm{d}c=2R\cos C\mathrm{d}C$$

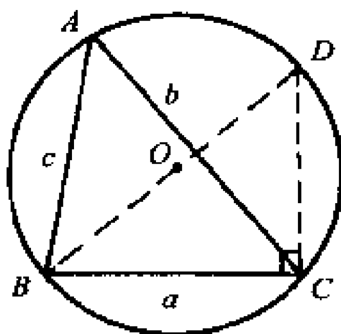


图 21

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\cos A}+\frac{\mathrm{d}b}{\cos B}+\frac{\mathrm{d}c}{\cos C}&=2R(\mathrm{d}A+\mathrm{d}B+\mathrm{d}C)\\&=2R\mathrm{d}(A+B+C)\\&=2R\mathrm{d}\pi=0\end{aligned}$$

例 21　设$\triangle ABC$的面积为S，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边长分别为a，b，c，当a为定值，b，c的微小改变量为Δb，Δc，$\angle A$的微小改变量为ΔA，证明

$$\Delta A\approx\frac{1}{4S}\left(\frac{c^2-a^2-b^2}{b}\Delta b+\frac{b^2-c^2-a^2}{c}\Delta c\right)$$

证　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

两边取全微分得

$$-\sin A\mathrm{d}A=\frac{1}{2c}\,\frac{2b\cdot b-(b^2+c^2-a^2)}{b^2}\mathrm{d}b+\frac{1}{2b}\,\frac{2c\cdot c-(b^2+c^2-a^2)}{c^2}\mathrm{d}c$$

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2bc\sin A}\left(\frac{c^2-b^2-a^2}{b}\mathrm{d}b+\frac{b^2-c^2-a^2}{c}\mathrm{d}c\right)$$

又　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，　$\Delta b=\mathrm{d}b$，　$\Delta c=\mathrm{d}c$

故　$\Delta A\approx\mathrm{d}A=\dfrac{1}{4S}\left(\dfrac{c^2-a^2-b^2}{b}\Delta b+\dfrac{b^2-c^2-a^2}{c}\Delta c\right)$

例 22　试证：函数$f(x,y)$在区域$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$内为

一定值的充分必要条件是$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

证 必要性 设 $f(x,y)=C$，则显然

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

充分性 设$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，由泰勒公式得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(a,b)+f'_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f'_y(a+\theta h,b+\theta k)k\\&=f(a,b)\end{aligned}$$

(其中 $h=x-a,k=y-b,h^2+k^2<r^2,0<\theta<1$)即 $f(x,y)$为定值.

例 23 设函数 $f(x,y,z)$有连续的偏导数，且 $f(0,0,0)=1$，当 $x^2+y^2+z^2\leqslant 9$ 时，$|\mathrm{grad}f|\leqslant 1$，证明在球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 9$ 上，$|f(x,y,z)|\leqslant 4$.

证 由泰勒公式

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(0,0,0)+f'_x(\xi,\eta,\rho)x+f'_y(\xi,\eta,\rho)y+f'_z(\xi,\eta,\rho)z\\&=1+\mathrm{grad}f(\xi,\eta,\rho)\cdot\{x,y,z\}\end{aligned}$$

其中 ξ，η，ρ 分别在 0 与 x，0 与 y，0 与 z 之间，故有

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)|&\leqslant 1+|\mathrm{grad}f(\xi,\eta,\rho)\cdot\{x,y,z\}|\\&\leqslant 1+|\mathrm{grad}f(\xi,\eta,\rho)||\{x,y,z\}|\\&\leqslant 1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant 4\end{aligned}$$

例 24 设 $f(x,)$，$g(x)$是可微函数，且满足

$$\begin{cases}u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)\\u(x,0)=\sin 2x\\u'_y(x,0)=0\end{cases}$$

求 $f(x)$，$g(x)$及 $u(x,y)$的表达式.

解

$$\begin{aligned}&u(x,0)=f(2x)+g(2x)=\sin 2x\\&u'_y(x,y)=5f'(2x+5y)-5g'(2x-5y)\\&u'_y(x,0)=5f'(2x)-5g'(2x)=0\end{aligned}$$

用 x 替换 $2x$ 得

$$f'(x)-g'(x)=0 \tag{1}$$

$$f(x)+g(x)=\sin x \tag{2}$$

(2)两边对 x 求导得

$$f'(x)+g'(x)=\cos x \tag{3}$$

由（1）、（3）得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+C$$

$$g(x)=\sin x-f(x)=\frac{1}{2}\sin x-C$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\sin(2x+5y)+\frac{1}{2}\sin(2x-5y)$$

$$=\sin 2x\cos 5y$$

例 25 试证：可微函数 $z=f(x,y)$ 是 $ax+by(ab\neq 0)$ 的函数的充要条件为 $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$.

证 必要性 若 $z=\varphi(ax+by)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y}=b\varphi'$$

则
$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

充分性 若 $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$，令

$$u=ax+by, \quad v=x$$

则 z 通过中间变量 u，v 构成 x，y 的复合函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=b\frac{\partial z}{\partial u}$$

代入 $b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$ 得

$$ab\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}=ab\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$b\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

由于 $b\neq 0$，只能$\frac{\partial z}{\partial v}=0$，故 z 只是 u 的函数，即 z 只是 $ax+by$ 的函数.

例 26 设函数 $f(x,y)$满足

$$f(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

证明：$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$.

证 由已知方程得

$$f(x,y)f''_{xy}(x,y)=f'_x(x,y)\cdot f'_y(x,y)$$

$$\frac{f''_{xy}(x,y)}{f'_x(x,y)}=\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}$$

积分得 $$\ln|f'_x(x,y)|=\ln|f(x,y)|+\varphi_1(x)$$

，（$\varphi_1(x)$ 是任意可导函数）

$$f'_x(x,y)=\pm\,\mathrm{e}^{\varphi_1(x)}f(x,y)$$

$$\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}=\pm\,\mathrm{e}^{\varphi_1(x)}\xlongequal{\text{def}}\varphi_2(x)$$

积分得 $$\ln|f(x,y)|=\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x+\psi_1(y)$$

（$\psi_1(y)$ 是任意可导函数）

$$f(x,y)=\pm\,\mathrm{e}^{\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\psi_1(y)}=\varphi(x)\psi(y)$$

其中 $\varphi(x)=\pm\mathrm{e}^{\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x}$，$\psi(y)=\mathrm{e}^{\psi_1(y)}$.

例 27 设 $f(x),g(x)$为连续可微函数，且

$$w=yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y$$

（1）若存在 u，使得 $\mathrm{d}u=w$，求 $f-g$；

（2）若 $f(x)=\varphi'(x)$，求 u，使得 $\mathrm{d}u=w$.

解 （1）由题设可知 w 是全微分，故

$$\frac{\partial(xg(xy))}{\partial x}=\frac{\partial(yf(xy))}{\partial y}$$

即 $$g(xy)+xyg'(xy)=f(xy)+xyf'(xy)$$

记 $s=xy$，得

$$s(f'(s)-g'(s))=-(f(s)-g(s))$$

$$\frac{\mathrm{d}(f-g)}{f-g}=-\frac{\mathrm{d}s}{s}$$

$$\ln|f-g|=-\ln|s|+C_1$$

得 $$f(s)-g(s)=\frac{C}{s} \qquad (C\text{ 是任意常数})$$

(2) 当 $f(x)=\varphi'(x)$ 时，由(1)的结果

$$g(s)=\varphi'(s)-\frac{C}{s}$$

$$\begin{aligned}
w&=y\varphi'(xy)\mathrm{d}x+x\left(\varphi'(xy)-\frac{C}{xy}\right)\mathrm{d}y\\
&=y\varphi'(xy)\mathrm{d}x+x\varphi'(xy)\mathrm{d}y-\frac{C}{y}\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{d}\varphi(xy)+\mathrm{d}(-C\ln|y|)\\
&=\mathrm{d}(\varphi(xy)-C\ln|y|)
\end{aligned}$$

故 $$u=\varphi(xy)-C\ln|y|+C_0 \qquad (C,C_0\text{ 是任意常数})$$

例 28 设函数 $u=\cos^2(xy)+\dfrac{y}{z^2}$，直线 L 是直线 $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}z=1\\ y-2z+4=0\end{cases}$ 在平面 $x+y-z=5$ 上的投影，试求函数 u 在点 $P(0,0,1)$ 沿直线 L 的方向导数(规定 L 上与 z 轴正向夹角为锐角的方向为 L 的方向).

解 过已知直线的平面束方程为

$$2x-3z-6+\lambda(y-2z+4)=0$$

即 $$2x+\lambda y+(-2\lambda-3)z+4\lambda-6=0$$

当它与已知平面垂直时，有

$$\{z,\lambda,-2\lambda-3\}\cdot\{1,1,-1\}=0$$

解得 $\lambda=-\frac{5}{3}$,故得平面

$$2x-\frac{5}{3}y+\left(-2\left(-\frac{5}{3}\right)-3\right)z+4\left(-\frac{5}{3}\right)-6=0$$

即 $$6x-5y+z-38=0$$

故得 $$L:\begin{cases}6x-5y+z-38=0\\x+y-z=5\end{cases}$$

L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{6,-5,1\}\times\{1,1,-1\}=\{4,7,11\}$$

$$\boldsymbol{s}^0=\frac{1}{\sqrt{186}}\{4,7,11\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos(xy)(-\sin(xy))\cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\cos(xy)(-\sin(xy))x+\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y}{z^3}$$

在点 $P(0,0,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial L}=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}=\frac{7}{\sqrt{186}}$$

例 29 设 $P(x,y,z)$为曲面 S 上一点,$\boldsymbol{n}$ 为 S 在点 P 处的法向量,点 $A(a,b,c)$为空间中一定点(不在 S 上),试证函数

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

在点 P 处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数等于 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{PA}$夹角余弦的相反数,即

$$\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}=-\cos(\boldsymbol{n},\overrightarrow{PA})$$

证 设 $S:F(x,y,z)=0$,则$\{F'_x,F'_y,F'_z\}$是 S 的法向量,故可

取

$$n=\frac{\{F'_x,F'_y,F'_z\}}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}} \qquad (|n|=1)$$

由于 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-a}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-b}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-c}{r}$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial n}&=\frac{x-a}{r}\frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}+\\&\frac{y-b}{r}\frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}+\\&\frac{z-c}{r}\frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}\\&=\left\{\frac{x-a}{r},\frac{y-b}{r},\frac{z-c}{r}\right\}\cdot n\\&=\frac{1}{r}\overrightarrow{AP}\cdot n\end{aligned}$$

而

$$\cos(n,\overrightarrow{PA})=\frac{n\cdot\overrightarrow{PA}}{|n||\overrightarrow{PA}|}=\frac{n\cdot\overrightarrow{PA}}{1\cdot r}=-\frac{1}{r}\overrightarrow{AP}\cdot n$$

故

$$\frac{\partial r}{\partial n}=-\cos(n,\overrightarrow{PA})$$

例 30 过椭球面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 外一定点(α,β,γ)作其切平面，再过原点作切平面的垂线，求垂足的轨迹方程.

解 由于切平面方程一定不过原点，故设切平面方程为

$$lx+my+nz=1 \qquad (1)$$

则由原点向该平面所作垂线方程为

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n} \qquad (2)$$

满足(1)、(2)的点(x,y,z)即为垂足. 下面要消去 l, m, n. 设平面(1)与椭球面切于(x_0,y_0,z_0)，则椭球面在该点的法向量为$\{ax_0,by_0,cz_0\}$，因此有

$$\frac{ax_0}{l}=\frac{by_0}{m}=\frac{cz_0}{n}=\frac{ax_0^2+by_0^2+cz_0^2}{lx_0+my_0+nz_0}=1$$

得 $x_0=\frac{l}{a}$，$y_0=\frac{m}{b}$，$z_0=\frac{n}{c}$，代入椭球面方程得

$$a\left(\frac{l}{a}\right)^2+b\left(\frac{m}{b}\right)^2+c\left(\frac{n}{c}\right)^2=1$$

即
$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}=1 \tag{3}$$

又因为切平面过(α,β,γ)有

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=1 \tag{4}$$

令(2)式等于 t，得

$$l=\frac{x}{t},\quad m=\frac{y}{t},\quad n=\frac{z}{t} \tag{5}$$

将(5)分别代入(1)、(3)、(4)得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{t}+\dfrac{z^2}{t}=1\\ \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{y}{t}\right)^2+\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{z}{t}\right)^2=1\\ \alpha\dfrac{x}{t}+\beta\dfrac{y}{t}+\gamma\dfrac{z}{t}=1\end{cases}$$

消去 t 得

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\alpha x+\beta y+\gamma z\\ \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\end{cases}$$

此即垂足的轨迹方程.

例 31 求

$$z=\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}+\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}$$

的最小值.

解 由于

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+2^2}$$

是点 $P(x,y,0)$与 $A(1,2,2)$的距离,

$$\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+1^2}$$

是点 $P(x,y,0)$ 与 $B(3,-1,-1)$ 的距离. 由于 A,B 分别位于 xOy 面上方与下方，点 P 在 xOy 面上，因此当 P 位于线段 AB 上时 z 取得最小值，且

$$z_{\min}=|AB|=\sqrt{22}$$

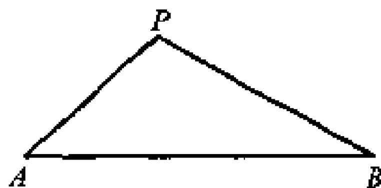


图 22

例 32 设 $f(x,y)$ 是定义在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上且具有连续偏导数的函数，$|f(x,y)|\leqslant 1$，求证在单位圆内存在点 (x_0,y_0) 使

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2\leqslant 16$$

证 令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$

则在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上由于 $|f(x,y)|\leqslant 1$，有 $g(x,y)\geqslant 1$，且 $g(0,0)\leqslant 1$，故 $g(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 内取得极小值(不严格的). 令 (x_0,y_0) 是 $g(x,y)$ 在圆内的极小点. 则

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}-4x_0=-4x_0$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}-4y_0=-4y_0$$

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2=16(x_0^2+y_0^2)\leqslant 16$$

例 33 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

解 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $z=r^2f(r^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=(2rf(r^2)+2r^3f'(r^2))\frac{x}{r}$$

$$=2x(f(r^2)+r^2f'(r^2))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(f(r^2)+r^2f'(r^2))+2x(2rf'(r^2)+$$

$$2rf'(r^2)+2r^3f''(r^2))\frac{x}{r}$$

$$=2f(r^2)+2f'(r^2)(r^2+4x^2)+4x^2r^2f''(r^2)$$

同理 $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(r^2)+2f'(r^2)(r^2+4y^2)+4y^2r^2f''(r^2)$

代入已知方程得

$$r^4f''(r^2)+3r^2f'(r^2)+f(r^2)=0$$

记 $r^2=u$，$v=f(u)$，则有

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}+3u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+v=0 \qquad \text{（欧拉方程）}$$

令 $u=\mathrm{e}^t$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}=\frac{1}{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$$

方程化成

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0$$

解得 $\quad f(u)=v=C_1\mathrm{e}^{-t}-C_2t\mathrm{e}^{-t}=\dfrac{C_1}{u}+\dfrac{C_2\ln u}{u}$

由 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，得 $C_1=0$，$C_2=1$，故

$$f(u)=\frac{\ln u}{u},\quad f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

令 $\quad f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0,\quad x=\mathrm{e}$

$x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；$x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

例 34 将正数 a 分成三正数 x，y，z 之和，并使 $f(x,y,z)=x^my^nz^p$ 为最大，其中 m，n，p 为已知正数.

解 令 $F=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda(x+y+z-a)$

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{m}{x} + \lambda = 0 \\ F'_y = \dfrac{n}{y} + \lambda = 0 \\ F'_z = \dfrac{p}{z} + \lambda = 0 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{ma}{m+n+p},\ y = \frac{na}{m+n+p},\ z = \frac{pa}{m+n+p}$$

由于问题本身确有最大值，故此时 $f(x,y,z)$ 取得最大值.

例 35 设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个非负数，证明

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

证 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$

其中 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$

令 $F = x_1x_2\cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a)$

$$\begin{cases} F'_{x_1} = x_2\cdots x_n + \lambda = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F'_{x_n} = x_1\cdots x_{n-1} + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$，由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在空间有界闭区域 $x_1\geqslant0$，…，$x_{n-1}\geqslant0$，$x_1+\cdots+x_{n-1}\leqslant a$ 上连续，故有最大值，又由于在区域边界上 $f=0$，故

$$f_{\max} = \left(\frac{a}{n}\right)^n,\quad \text{即 } x_1x_2\cdots x_n \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

因此有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{a}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

例 36 试求一个三角形，使其三个顶角的正弦的积为最大.

解 设三个顶角分别为 x，y，$\pi-x-y$.

$$z=\sin x\sin y\sin(\pi-x-y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$$

其中 $x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$. 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)=0\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}\sin y\sin(2x+y)=0\\ \sin x\sin(x+2y)=0\end{cases}$$

由于 $\sin x\neq0$，$\sin y\neq0$，故

$$\sin(2x+y)=0,\sin(x+2y)=0$$

又由于
$$0<2x+y<2\pi$$
$$0<x+2y<2\pi$$

故
$$2x+y=\pi,\quad x+2y=\pi$$

得
$$x=y=\frac{\pi}{3}$$

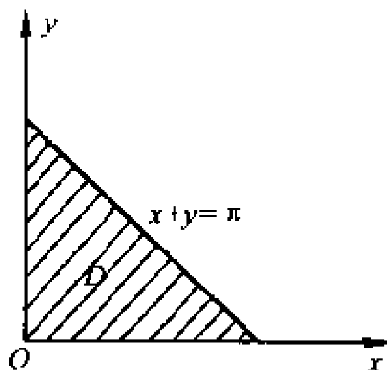


图 23

如图 23，在区域 D：$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$x+y\leqslant\pi$ 上 z 有最大值，又在三条边界线段上，$z=0$，在驻点处

$$z\Big|_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)}=\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}>0$$

故当三角形为等边三角形时，其三个顶角的正弦积最大.

例 37 设 $R=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha}$ $\left(0<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}\right)$，试问 α,β,γ 中哪一个的变动对 R 影响最大？

解 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}$

两边取全微分

$$-\frac{1}{R^2}\mathrm{d}R=-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\mathrm{d}\beta-\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\mathrm{d}\gamma$$

$$\mathrm{d}R=R^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha+\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\mathrm{d}\beta+\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\mathrm{d}\gamma\right)$$

故 $$\frac{\partial R}{\partial\alpha}=R^2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\quad \frac{\partial R}{\partial\beta}=R^2\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta},\quad \frac{\partial R}{\partial\gamma}=R^2\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

由于 $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$，故

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}>\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}>\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}>0$$

$$\frac{\partial R}{\partial\alpha}>\frac{\partial R}{\partial\beta}>\frac{\partial R}{\partial\gamma}>0$$

因此 α 的变动对 R 影响最大.

例 38 设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，试证：若 $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=1$，则 $f(x,y)$ 有最小值.

证 由题设，$\exists\ a>0$，当 $r\geqslant a$ 时，

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0$$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\boldsymbol{e}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$，则有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)>0$$

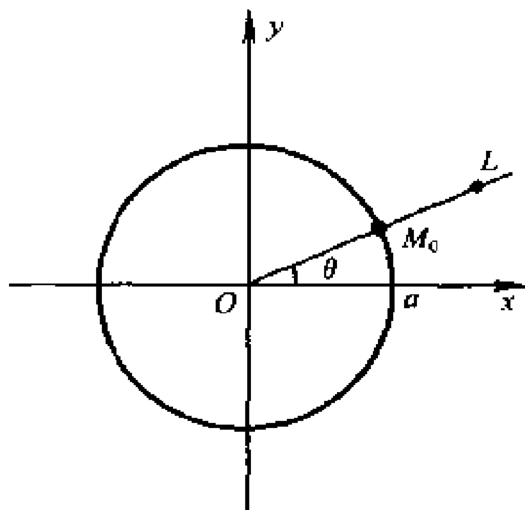


图 24

如图 24，设 M_0 是圆 $r=a$ 上的点，L 是过 O，M_0 的射线，则当 $M\in L$，且 $OM>OM_0$ 时，有 $f(M)>f(M_0)$. 因此，当 $r\geqslant a$，$f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=a^2$ 上取得最小值. 又 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 上有最小

值，则该最小值也是 $f(x,y)$ 在全平面上的最小值.

例 39 图 25 表示一槽的横断面，它由一段中心在 O 点，半径为 x 的圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 与两条直边 AB, CD 所组成，槽的横断面周长是固定的，问当 θ 为多大时横断面的面积为最大？

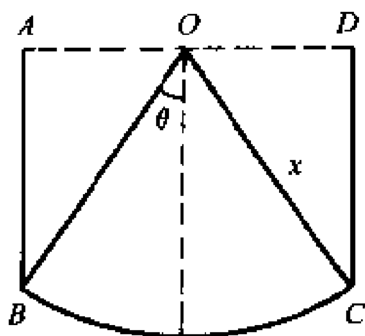


图 25

解 由题设，横断面的面积为

$$S = S_{扇} + 2 \times S_{\triangle AOB}$$
$$= \frac{1}{2}x^2(2\theta) + 2 \times \frac{1}{2}(x\sin\theta)(x\cos\theta)$$
$$= x^2(\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

槽的横断面的周长为

$$\overset{\frown}{BC} + 2AB = 2x\theta + 2x\cos\theta$$
$$= 2x(\theta + \cos\theta) \equiv C \qquad (C \text{ 最常数})$$

令 $\quad F = x^2(\theta + \sin\theta\cos\theta) + \lambda[2x(\theta + \cos\theta) - C]$

$$\begin{cases} F'_x = 2x(\theta + \sin\theta\cos\theta) + 2\lambda(\theta + \cos\theta) = 0 & (1) \\ F'_\theta = x^2(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\lambda x(1 - \sin\theta) = 0 & (2) \\ 2x(\theta + \cos\theta) = C & (3) \end{cases}$$

由(1)、(2)得

$$x(\theta + \sin\theta\cos\theta) = -\lambda(\theta + \cos\theta)$$
$$x(1 - \sin^2\theta) = -\lambda(1 - \sin\theta)$$

两式相除得

$$\frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{1 - \sin^2\theta} = \frac{\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta}$$
$$(1 - \sin\theta)(\theta\sin\theta + \cos\theta) = 0$$

由于 $\theta\sin\theta + \cos\theta \neq 0 \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，得

$$1-\sin\theta=0,\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

由问题的实际意义，S 存在最大值，故当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 S 取得最大值.

例 40 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上引一条距离原点最远的法线.

解 当 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 时，椭圆方程对 x 求导得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

过点(x,y)的法线方程为

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x)$$

原点到该直线的距离的平方为

$$d^2=\frac{\left(-\frac{a^2y}{b^2}+y\right)^2}{\left(\frac{a^2y}{b^2x}\right)^2+1}=\frac{(a^2-b^2)^2x^2y^2}{a^4y^2+b^4x^2}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}}{b^2\frac{x^2}{a^2}+a^2\frac{y^2}{b^2}}$$

令 $u=\frac{x^2}{a^2}$，$v=\frac{y^2}{b^2}$，$f(u,v)=\frac{uv}{b^2u+a^2v}$. 下面在条件 $u+v=1(u,v\geqslant 0)$下求 $f(u,v)$的最大值点. 令

$$F=\frac{uv}{b^2u+a^2v}+\lambda(u+v-1)$$

$$\begin{cases}F'_u=\dfrac{a^2v^2}{(b^2u+a^2v)^2}+\lambda=0\\ F'_v=\dfrac{b^2u^2}{(b^2u+a^2v)^2}+\lambda=0\\ u+v=1\end{cases}$$

解得 $u=\frac{a}{a+b}$，$v=\frac{b}{a+b}$. 由实际问题，d^2 确有最大值，故 f 确有

最大值．因此当

$$u=\frac{a}{a+b},\quad v=\frac{b}{a+b}$$

即
$$x=\sqrt{\frac{a^3}{a+b}},\quad y=\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}$$

时 d^2 取得最大值．利用对称性，距离原点最远的法线有四条，其方程分别为

$$y-\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}\left(x\mp\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}\right)$$

$$y+\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}\left(x\pm\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}\right)$$

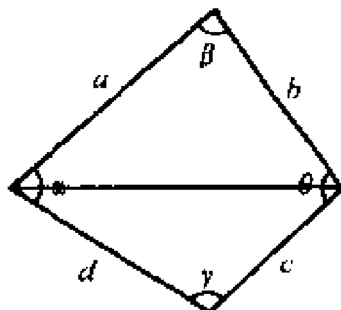


图 26

例 41　设四边形各边长一定，分别为 a，b，c，d，问何时四边形面积最大？

解　如图 26，设角 α，β，γ，θ，于是四边形面积为

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\gamma$$

其中 β，γ 满足条件

$$a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\gamma$$

令
$$F=ab\sin\beta+cd\sin\gamma+\lambda(a^2+b^2-2ab\cos\beta-c^2-d^2+2cd\cos\gamma)$$

$$\begin{cases}F'_\beta=ab\cos\beta+2ab\lambda\sin\beta=0 & (1)\\ F'_\gamma=cd\cos\gamma-2cd\lambda\sin\gamma=0 & (2)\\ a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\gamma & (3)\end{cases}$$

由(1)、(2)得　$\mathrm{tg}\beta=-\mathrm{tg}\gamma$

$$\beta=\pi-\gamma\quad 或\quad \beta=-\gamma(舍去)$$

故
$$\beta+\gamma=\pi$$

且因此有
$$\alpha+\theta=\pi$$

由实际问题，A 确有最大值，故当四边形的两组对角之和都为

π 时 A 最大，即当四边形为圆内接四边形时其面积最大.

例 42 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $lx+my+nz=0$ 相交所得椭圆的面积.

解 由于平面过原点，故椭圆中心在原点. 因此椭圆上的点到原点距离的最大值与最小值为椭圆的两个半轴的长. 设 (x,y,z) 为椭圆上任一点，下面在条件

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad lx+my+nz=0$$

下求 $d^2=x^2+y^2+z^2$ 的最大值与最小值. 设

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(lx+my+nz)$$

$$\begin{cases} F'_x=2x+\dfrac{2\lambda}{a^2}x+\mu l=0 & (1) \\ F'_y=2y+\dfrac{2\lambda}{b^2}y+\mu m=0 & (2) \\ F'_z=2z+\dfrac{2\lambda}{c^2}z+\mu n=0 & (3) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 & (4) \\ lx+my+nz=0 & (5) \end{cases}$$

由 $(1)x+(2)y+(3)z$ 得

$$2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+\mu(lx+my+nz)=0$$

利用(4)、(5)得

$$2d^2+2\lambda=0, \quad \lambda=-d^2$$

代入(1)、(2)、(3)解得

$$x=-\mu\frac{la^2}{2(a^2-d^2)}, \quad y=-\mu\frac{mb^2}{2(b^2-d^2)}, \quad z=-\mu\frac{nc^2}{2(c^2-d^2)}$$

代入(5)得

$$\frac{l^2a^2}{a^2-d^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-d^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-d^2}=0$$

即

$$(l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2)d^4-(l^2a^2b^2+l^2a^2c^2+m^2a^2b^2+$$
$$m^2a^2c^2+n^2a^2c^2+n^2b^2c^2)d^2+(l^2+m^2+n^2)a^2b^2c^2=0$$

由此可确定两个极值 d_1^2 与 d_2^2. 因此椭圆的面积为

$$A=\pi d_1 d_2$$

利用韦达定理可得

$$A=\pi\sqrt{d_1^2d_2^2}=\pi\sqrt{\frac{(l^2+m^2+n^2)a^2b^2c^2}{l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2}}$$
$$=\pi abc\sqrt{\frac{l^2+m^2+n^2}{l^2a^2+m^2b^2+n^2c^2}}$$

例 43 设$\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 分别位于曲线 $L_1:f(x,y)=0$、$L_2:g(x,y)=0$, $L_3:h(x,y)=0$ 上，试证：若$\triangle ABC$ 的面积达到最大值，则曲线在 A, B, C 处的法线都与三角形的对边垂直.

证 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 则 L_1 在点 A 处，L_2 在点 B 处，L_3 在点 C 处的切线斜率分别为

$$k_1=-\frac{f'_x(x_1,y_1)}{f'_y(x_1,y_1)},\quad k_2=-\frac{g'_x(x_2,y_2)}{g'_y(x_2,y_2)},\quad k_3=-\frac{h'_x(x_3,y_3)}{h'_y(x_3,y_3)}$$

而 $$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad k_{BC}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\quad k_{AB}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|\varphi|$, 其中

$$\varphi=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$
$$=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2$$

且 $$f(x_1,y_1)=0,\quad g(x_2,y_2)=0,\quad h(x_3,y_3)=0$$

令

$$F=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}+\lambda f(x_1,y_1)+\mu g(x_2,y_2)+\sigma h(x_3,y_3)$$

$$\begin{cases}F'_{x_1}=y_2-y_3+\lambda f'_x(x_1,y_1)=0\\ F'_{x_2}=y_3-y_1+\mu g'_x(x_2,y_2)=0\\ F'_{x_3}=y_1-y_2+\sigma h'_x(x_3,y_3)=0\\ F'_{y_1}=x_3-x_2+\lambda f'_y(x_1,y_1)=0\\ F'_{y_2}=x_1-x_3+\mu g'_y(x_2,y_2)=0\\ F'_{y_3}=x_2-x_1+\sigma h'_y(x_3,y_3)=0\\ f(x_1,y_1)=0,g(x_2,y_2)=0,h(x_3,y_3)=0\end{cases}$$

解得

$$-\frac{f'_x(x_1,y_1)}{f'_y(x_1,y_1)}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\ -\frac{g'_x(x_2,y_2)}{g'_y(x_2,y_2)}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

$$-\frac{h'_x(x_3,y_3)}{h'_y(x_3,y_3)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

即 $k_1=k_{BC}$，$k_2=k_{AC}$，$k_3=k_{AB}$，因此当 S 达到最大值时，曲线在 A，B，C 处的法线都与三角形的对边垂直.

例 44 设有一表面光滑的橄榄球，它的表面形状是由长半轴为 6，短半轴为 3 的椭圆绕其长轴旋转所得的旋转椭球面. 在无风的细雨天，将该球放在室外草坪上，使长轴在水平位置，求雨水从椭球面上流下的路线方程.

解 由题设，椭球面方程为(取 y 轴为长轴)

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

由于雨水会沿着 z 下降最快的方向向下流，此方向就是使 z 的方向导数取得最大值的方向，即是

$$\mathrm{grad}z=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

设雨水流下的曲线为 L，L 在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$$L_{xy}: f(x,y)=0$$

则 L_{xy}的切向量$\{dx,dy\}$应与 grad$z$ 平行，故

$$\frac{dx}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

椭球面方程两边取全微分

$$\frac{2x}{9}dx+\frac{2y}{36}dy+\frac{2z}{9}dz=0$$

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{4z}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{4z}$$

因此有

$$\frac{dx}{-\frac{x}{z}}=\frac{dy}{-\frac{y}{4z}}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{4dy}{y}$$

解得 $x=Cy^4$(C 可以由雨滴的初始位置确定)．因此所求曲线为

$$L:\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1\\ x=Cy^4\end{cases}$$

第五章　多元函数积分学

一、内容要点

本章内容包括二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分的概念、性质、计算及其应用.

第二类曲线积分与第二类曲面积分的一些补充性质：

若在曲线 C 上，$\max\sqrt{X^2+Y^2}=M$，曲线 C 的长为 L，则

$$\int_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \int_C \{X,Y\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$$

$$\leqslant \int_C |\{X,Y\}||\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}| = \int_C \sqrt{X^2+Y^2}\mathrm{d}l \leqslant ML$$

若在曲面 S 上，$\max\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=M$，曲面 S 的面积为 A，则

$$\iint_S X\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \{X,Y,Z\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\leqslant \iint_S |\{X,Y,Z\}||\mathrm{d}\boldsymbol{S}| = \iint_S \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\mathrm{d}S \leqslant MA$$

如图 27，若在复连通区域 D 上 X、Y 及其偏导数连续，且 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$，则对任意不围绕 D_1 的闭曲线 C，有

$$\oint_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = 0$$

因此，若 C_1、C_2 是位于 D 内且有共同起点与共同终点的两条曲线，则当 C_1+C_2 不围绕 D_1 时，有

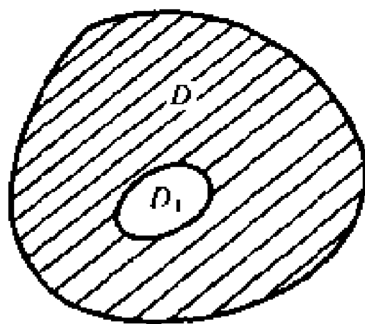


图 27

$$\int_{C_1} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \int_{C_2} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$$

若 C_1，C_2 是位于 D 内且围绕 D_1 的任意两条闭曲线，则

$$\oint_{C_1} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \oint_{C_2} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$$

若在空间单连通区域 V 内，X，Y，Z 及其偏导数连续，则在 V 内下面四个结论等价：

(1) $\int_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ 与路径无关；

(2) $\dfrac{\partial Z}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Y}{\partial z}$，　$\dfrac{\partial X}{\partial z} \equiv \dfrac{\partial Z}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial Y}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial X}{\partial y}$；

(3) 沿任意闭曲线 $\oint_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0$；

(4) $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ 是全微分.

二、例题选讲

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^6}\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(5m^4 - 18m^2k^2 + 5k^4)$

解　将 $0\leqslant x\leqslant 1$　n 等分，将 $0\leqslant y\leqslant 1$　n 等分，则 $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$，$\Delta y_i = \dfrac{1}{n}$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 被分成 n^2 个小区域，每个小区域的面积都是 $\Delta\sigma = \dfrac{1}{n^2}$，取 $(\xi_m, \eta_k) = \left(\dfrac{m}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(5m^4 - 18m^2k^2 + 5k^4)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(5\left(\frac{m}{n}\right)^4 - 18\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)\frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(5\xi_m^4 - 18\xi_m^2\eta_k^2 + 5\eta_k^4)\Delta\sigma$$

$$= \iint_D (5x^4 - 18x^2y^2 + 5y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

例 2 设 $f(x)=\sin\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x)=\cos\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\sin\left(\int_0^x \sin^3 t\mathrm{d}t\right)$

例 3 设 $f(x)$在$[0,1]$上可积，证明

$$\iint\limits_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \pi$$

证 由于 $e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2!}x^2\geqslant 1+x$

有

$$e^{f(x)-f(y)}\geqslant 1+f(x)-f(y)$$

$$\iint\limits_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} e^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint\limits_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}(1+f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi+\iint\limits_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

例 4 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\cdot e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

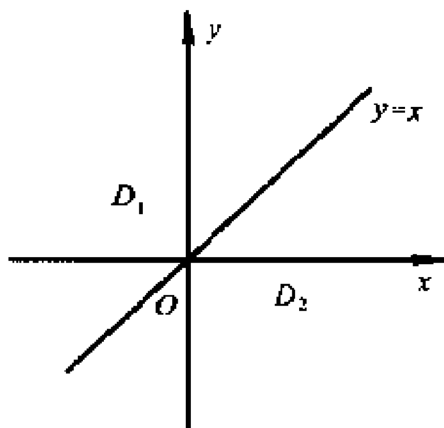


图 28

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1} xe^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} ye^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} xe^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x} ye^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} xe^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{2}y)^2}\mathrm{d}(\sqrt{2}y)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例 5 求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的体积最小，试写出切平面方程并求出最小体积.

解 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是抛物面上任一点，该点处的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad (z_0=1+x_0^2+y_0^2)$$

即 $$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2$$

记 $$D:\quad (x-1)^2+y^2\leqslant 1$$

$$V=\iint\limits_D((1+x^2+y^2)-(2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho^2-2x_0\rho\cos\theta-2y_0\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+(x_0^2+y_0^2)\pi$$

$$=\frac{3}{2}\pi-2x_0\pi+(x_0^2+y_0^2)\pi$$

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x_0}=-2\pi+2x_0\pi=0\\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial y_0}=2y_0\pi=0\end{cases}$$

得 $x_0=1$，$y_0=0$. 由问题的实际意义，V 确有最小值，故当 $x_0=1$，$y_0=0$ 时 V 最小，此时切平面方程为

$$2(x-1)-(z-2)=0$$

即 $$2x-z=0$$

且最小体积为 $V=\dfrac{\pi}{2}$.

例 6 求下列曲面 $x^2+y^2=cz$，$x^2-y^2=\pm a^2$，$xy=\pm b^2$ 与平面 $z=0$ 围成区域的体积(其中 a,b,c 为正实数).

解 区域为曲顶柱体. 顶部函数为 $z=\frac{x^2+y^2}{c}$，底面图形在第一象限的部分 D 如图 29，由对称性

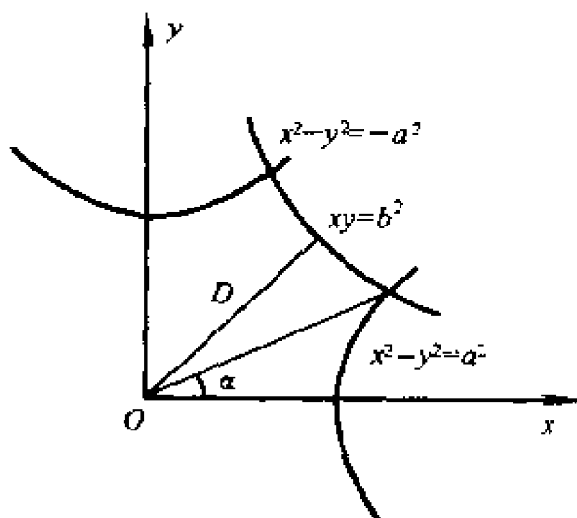


图 29

$$
\begin{aligned}
V &= 4\iint_D \frac{1}{c}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{c}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{8}{c}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{\sin 2\theta}}}\rho^3\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{2}{c}\int_0^{\alpha}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{2}{c}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4b^4}{\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^4}{c}\tan 2\alpha+\frac{4b^4}{c}\cot 2\alpha
\end{aligned}
$$

由于在 $\theta=\alpha$ 处两曲线相交，又 $x^2-y^2=a^2$ 与 $xy=b^2$ 的极坐标方程分别为

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

故有
$$\frac{a}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{\sin 2\alpha}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2b^2}{a^2}$$

因此
$$V = \frac{a^4}{c}\,\frac{2b^2}{a^2} + \frac{4b^4}{c}\,\frac{a^2}{2b^2} = \frac{4a^2b^2}{c}$$

例 7 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明

$$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y = \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

证 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y$$

（交换积分次序）

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y + \int_0^a f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x$$

（用 x,y 分别替换 y,x）

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y = \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

例 8 设 $f(x)$ 为连续偶函数，试证明

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u$$

其中 D： $\begin{cases} |x| \leqslant a \\ |y| \leqslant a \end{cases} \quad (a>0)$

证
$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} f(x-y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{令 } u = x - y} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{x-a}^{x+a} f(u)\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_{-2a}^{0} f(u)\mathrm{d}u \int_{-a}^{u+a} \mathrm{d}x + \int_{0}^{2a} f(u)\mathrm{d}u \int_{u-a}^{a} \mathrm{d}x$$

$$= \underset{(\text{令 } t = -u)}{\int_{-2a}^{0} f(u)(u+2a)\mathrm{d}u} + \int_{0}^{2a} f(u)(2a-u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{0}^{2a} f(-t)(2a-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2a} f(u)(2a-u)\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u$$

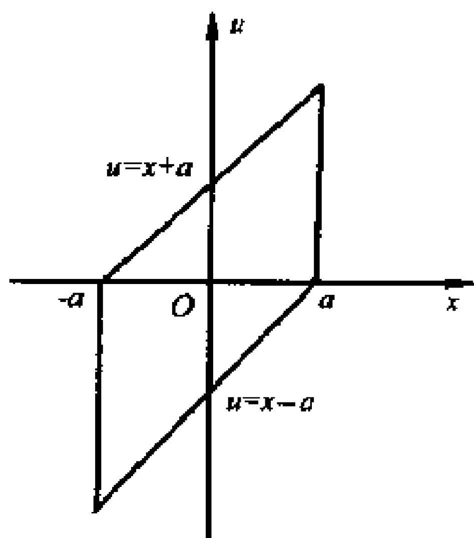


图 30

例 9 已知 $y'(x) = \arctan(x-1)^2$ 及 $y(0) = 0$，求 $I = \int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$.

解

$$I = \int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x y'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \arctan(t-1)^2 \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^1 \arctan(t-1)^2 \mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^1 (t-1)\arctan(t-1)^2 \mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{令 } u = (t-1)^2} \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan u \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} u \arctan u \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$$

例 10 求 $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \qquad (0<a<b)$

解 原式 $=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y$

$$=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=\ln\frac{1}{x}}\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y+1)u}\sin u\mathrm{d}u$$

$$=\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-(y+1)u}}{1+(1+y)^2}(-(y+1)\sin u-\cos u)\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \frac{1}{1+(1+y)^2}\mathrm{d}y=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$$

例 11 设 D：$x^2+y^2\leqslant 1$，试证明不等式

$$\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{5}\pi$$

证 $I=\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \sin\rho^3\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^1 \rho\sin\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^1 \rho\left(\rho^3-\frac{(\rho^3)^3}{3!}+\frac{(\rho^3)^5}{5!}-\cdots\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^1 \left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}+\frac{1}{5!}\rho^{16}-\cdots\right)\mathrm{d}\rho$$

被积函数是莱布尼兹型级数，因此有

$$2\pi\int_0^1 \left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}\right)\mathrm{d}\rho\leqslant I\leqslant 2\pi\int_0^1 \rho^4\mathrm{d}\rho$$

由于 $$2\pi\int_0^1 \left(\rho^4-\frac{1}{3!}\rho^{10}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{61}{165}\pi$$

$$2\pi\int_0^1 \rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{2}{5}\pi$$

故 $$\frac{61}{165}\pi\leqslant I\leqslant\frac{2}{5}\pi$$

例 12 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且恒为正，对一切 t，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \leqslant 1$，证明对一切 a 与 $b(a<b)$ 有

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{b-a}{2}+1$$

证 令 $F(t)=\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx$，则 $F(t)$ 是连续函数.

$$\begin{aligned}\int_a^b F(t)dt &= \int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \int_a^b e^{-|t-x|}dt \\ &= \int_a^b f(x)dx\left[\int_a^x e^{-(x-t)}dt + \int_x^b e^{-(t-x)}dt\right] \\ &= \int_a^b f(x)(2-e^{a-x}-e^{x-b})dx\end{aligned}$$

由于 $$F(t) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \leqslant 1$$

故有 $$\int_a^b F(t)dt \leqslant b-a$$

即

$$2\int_a^b f(x)dx - \int_a^b e^{a-x} f(x)dx - \int_a^b e^{x-b} f(x)dx \leqslant b-a$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leqslant \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)e^{a-x}dx + \\ &\quad \frac{1}{2}\int_a^b e^{x-b} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b e^{-|a-x|} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b e^{-|b-x|} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}F(a)+\frac{1}{2}F(b) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{b-a}{2}+1\end{aligned}$$

例 13 设 D：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$.

(1) 求 $B=\iint\limits_{D}|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，试证：存在$(\xi,\eta)\in D$，使$|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{B}$.

证 如图 31，

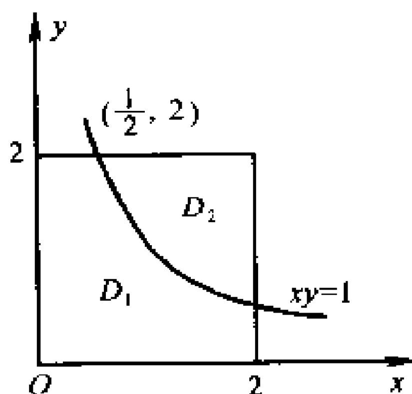


图 31

$$B=\iint\limits_{D_1}(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2(xy-1)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

(2) 由题设

$$1=\iint\limits_{D}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}(xy-1)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\iint\limits_{D}|xy-1||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（利用广义积分中值定理）}$$

$$=|f(\xi,\eta)|\iint\limits_{D}|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（其中}(\xi,\eta)\in D\text{）}$$

$$=f(\xi,\eta)B$$

故 $$|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{B}$$

例 14 设函数 $f(x,y)$ 在 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，对任意 $(a,b)\in D$，设 $D(a,b)$ 是以 (a,b) 为中心、含于 D 内且各边与 D 的边平行的最大正方形，若总有 $\iint\limits_{D(a,b)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，证明在 D 上 $f(x)\equiv 0$.

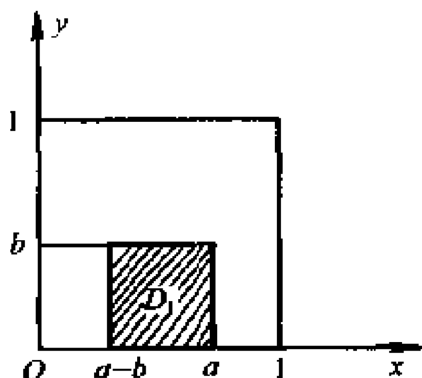


图 32

解 对 $\forall\ 0\leqslant a$、$b\leqslant 1$，设

$$I(a,b)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

不妨设 $a\geqslant b$，如图 32，取正方形 D_1，则由题设有

$$I(a,b)=I(a-b,b)+\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I(a-b,b)$$

记 $a_1=a-b$，$b_1=b$，则

$$I(a,b)=I(a_1,b_1)$$

如此下去得

$$I(a,b)=I(a_1,b_1)=I(a_2,b_2)=\cdots=I(a_n,b_n)$$

其中当 $a_n\geqslant b_n$ 时，$a_{n+1}=a_n-b_n$，$b_{n+1}=b_n$；当 $a_n<b_n$ 时，$a_{n-1}=a_n$，$b_{n+1}=b_n-a_n$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$I(a,b)=\lim_{n\to\infty}I(a_n,b_n)=I(0,0)=\iint\limits_{D(0,0)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

若存在 $(x_0,y_0)\in D$，有 $f(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0,y_0)>0$，则由于 $f(x,y)$ 连续，故存在包含 (x_0,y_0) 且全部位于 D 内的正方形 D^*：$c\leqslant x\leqslant d$，$h\leqslant y\leqslant k$，使在 D^* 上，$f(x,y)>0$，故

$$\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$$

另一方面

$$\iint_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I(d,k) -$$

$$I(d,h) - I(c,k) + I(c,h) = 0$$

矛盾．故在 D 上 $f(x) \equiv 0$.

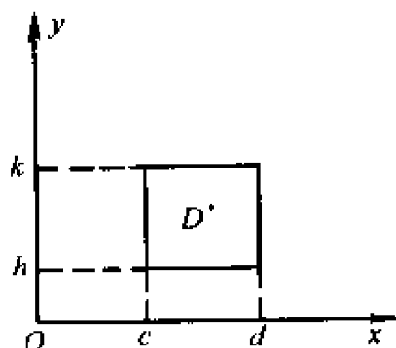


图 33

例 15 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D:

$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上具有连续的四阶偏导数，且 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leqslant 3$，在 D 的边界上 $f(x,y)$ 恒为零，试证明

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \frac{1}{48}$$

证 设 $I = \iint_D xy(1-x)(1-y)\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由题意 $f(x,1) \equiv 0, f(x,0) \equiv 0 (0 \leqslant x \leqslant 1)$，故有

$$f''_{x^2}(x,1) \equiv 0, \quad f''_{x^2}(x,0) \equiv 0$$

$$I = \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \qquad \text{（分部积分）}$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\left[y(1-y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\left[\int_0^1 (2y-1)\mathrm{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x \qquad \text{（分部积分）}$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\left[(2y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x(1-x)\left[f''_{x^2}(x,1) + f''_{x^2}(x,0) - \int_0^1 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 -2x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 -2\mathrm{d}y\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{(分部积分)}$$

$$= -2\int_0^1\left[x(1-x)f'_x\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'_x\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_0^1\left[(2x-1)f\Big|_0^1 - \int_0^1 2f\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_0^1\left(\int_0^1 -2f\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

故 $$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| = \frac{1}{4}\left|\iint_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\iint_D |xy(1-x)(1-y)|\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\mathrm{d}\sigma$$

$$\leqslant \frac{3}{4}\iint_D xy(1-x)(1-y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{3}{4}\left(\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{48}$$

例 16 若 $f_1(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t$，…，$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\mathrm{d}t$，$x>0$，试证

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}\mathrm{d}t$$

证 $k_1=1$ 时有

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{0!}\int_0^x f(t)(x-t)^0\mathrm{d}t$$

假设 $$f_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-2)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{k-2}\mathrm{d}t$$

则
$$f_k(x)=\int_0^x\left[\frac{1}{(k-2)!}\int_0^t f(u)(t-u)^{k-2}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

（交换积分次序）

$$=\frac{1}{(k-2)!}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\int_u^x (t-u)^{k-2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(u)(x-u)^{k-1}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}\mathrm{d}t$$

故得证.

例 17 计算 $\iiint\limits_V x\mathrm{d}V$，其中 V 是由 $z=xy$，$x+y+z=1$ 与 $z=0$ 所围成的区域.

解 区域 V 如图 34. 由 $\begin{cases}z=xy\\x+y+z=1\end{cases}$ 消去 z 得 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. 如图 35，V 在 xOy 面上投影区域为 $D=D_1+D_2$，则

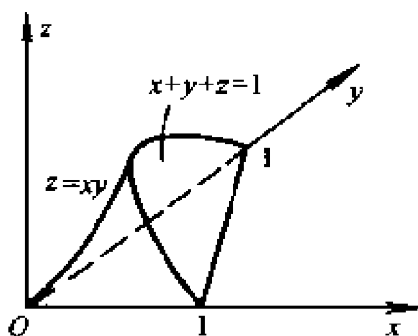


图 34

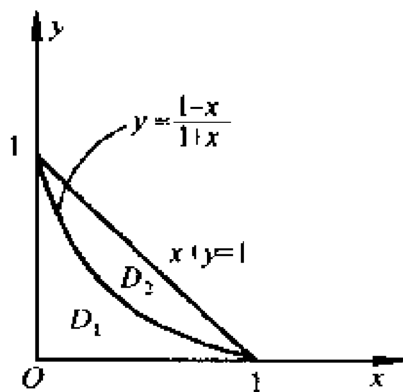


图 35

$$\iiint\limits_V x\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{xy}\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_1} x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} x^2 y \mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} x(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 4x - 4 + \frac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln 2 - \frac{11}{8}$$

例 18 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3$$

证 1 令 $F(u) = \int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(u) = f(u)$，于是

$$\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3 = \frac{1}{3!}[F(1) - F(0)]^3 = \frac{1}{6}F^3(1)$$

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)(F(y) - F(x))\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 F(y)\mathrm{d}F(y) - \int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(x)\, \frac{1}{2}F^2(y)\Big|_x^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)F(x)(F(1) - F(x))\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x)F^2(1) - f(x)F^2(x))\mathrm{d}x -$$

$$\int_0^1 f(x)F(x)F(1)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)F^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1)F(x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}F(x) -$$

$$F(1)\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1)(F(1) - F(0)) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}F^3(x)\Big|_0^1 -$$

$$\frac{1}{2}F(1)F^2(x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}F^3(1) + \frac{1}{6}F^3(1) - \frac{1}{2}F^3(1) = \frac{1}{6}F^3(1)$$

故
$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3$$

证 2 令
$$G(u) = \int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_x^u f(y)\mathrm{d}y\int_x^y f(z)\mathrm{d}z - \frac{1}{3!}\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]^3$$

$$g(x,u) = f(x)\int_x^u f(y)\mathrm{d}y\int_x^y f(z)\mathrm{d}z$$

则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u g(x,u)\mathrm{d}x = g(u,u) + \int_0^u g_u'(x,u)\mathrm{d}x$$

故

$$G'(u) = f(u)\int_u^u f(y)\mathrm{d}y\int_u^y f(z)\mathrm{d}z +$$

$$\int_0^u\left[f(x)f(u)\int_x^u f(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]^2 f(u)$$

$$= \frac{f(u)}{2}\left[2\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_x^u f(z)\mathrm{d}z - \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]$$

$$= \frac{f(u)}{2}\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_x^u f(z)\mathrm{d}z - \int_0^u f(z)\mathrm{d}z\int_z^u f(x)\mathrm{d}x -\right.$$

$$\left.\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]$$ （交换积分次序）

$$= \frac{f(u)}{2}\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_x^u f(z)\mathrm{d}z + \int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(z)\mathrm{d}z -\right.$$

$$\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)^2\Bigg]$$

$$= \frac{f(u)}{2}\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\int_0^u f(z)\mathrm{d}z - \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)^2\right]$$

$$= 0$$

因此 $G(u)\equiv C$，又 $G(0)=0$，故 $G(u)\equiv 0(u\in[0,1])$. 令 $u=1$，有 $G(1)=0$，即有

$$\int_0^1\int_z^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3$$

例 19 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

解 令 $x_k=1-y_k$，$k=1, 2, \cdots, n$，则

$$I_n \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(n-(y_1+y_2+\cdots+y_n))\right]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$= \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left[\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$= \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

故
$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{1}{2}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}I_n = \frac{1}{2}$$

例 20 如图 36，设曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线，试求 $\oint_\Gamma(x+y^2)\mathrm{d}l$.

解 由轮换对称性

$$I = \oint_\Gamma(x+y^2)\mathrm{d}l = \oint_\Gamma x\mathrm{d}l + \oint_\Gamma y^2\mathrm{d}l$$

$$= \frac{1}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)\mathrm{d}l + \frac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l$$

$$= \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} dl + \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} dl$$

$$= \frac{2}{3}\oint_{\Gamma} dl$$

Γ 是一个圆，其内接正三角形的边长为$\sqrt{2}$，如图 37，可求得 Γ 的半径为

$$a = \frac{\sqrt{2}/2}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

故 $$I = \frac{2}{3} \times 2\pi a = \frac{4\sqrt{6}}{9}\pi$$

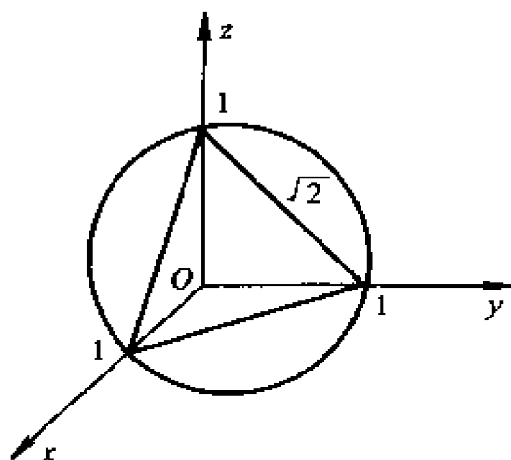


图 36

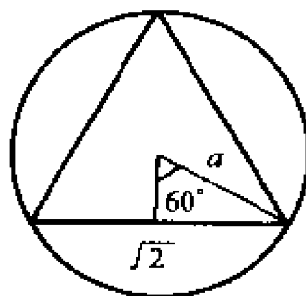


图 37

例 21 设曲线 C：$y=\sin x$，$x\in[0,\pi]$，试证

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 \leqslant \int_C x dl \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

证 $$\int_C x dl = \int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$\xlongequal{令 t=\pi-x} \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\sqrt{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$=\pi\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2t}\mathrm{d}t-\int_0^\pi t\sqrt{1+\cos^2t}\mathrm{d}t$$

解得 $$\int_C x\mathrm{d}l=\int_0^\pi x\sqrt{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$$

令 $a=\sqrt{2}+\sin x$，$b=\sqrt{2}-\sin x$，由

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)$$

有 $$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos^2x)\leqslant\sqrt{1+\cos^2x}\leqslant\sqrt{2}$$

所以 $$\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\pi(1+\cos^2x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\pi\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\pi$$

故 $$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_C x\mathrm{d}l\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

例 22 设函数 $f(x,y)$在包含原点的某开圆 G 内可微，且 $f(0,0)=0$，证明：当$(x,y)\in G$，

$$f(x,y)=x\int_0^1 f_1'(tx,ty)\mathrm{d}t+y\int_0^1 f_2'(tx,ty)\mathrm{d}t$$

证 如图 38，直线$\overline{OP}$：

$$u=tx,v=ty\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$f(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}f_1'(x,y)\mathrm{d}x+f_2'(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}f_1'(u,v)\mathrm{d}u+f_2'(u,v)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 f_1'(tx,ty)x\mathrm{d}t+f_2'(tx,ty)y\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^1 f_1'(tx,ty)\mathrm{d}t+y\int_0^1 f_2'(tx,ty)\mathrm{d}t$$

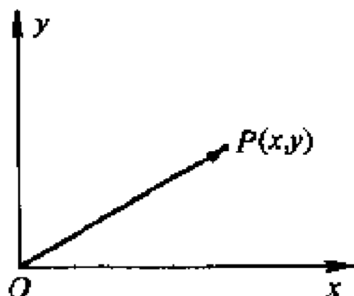


图 38

例 23 设 $f(u)$为连续函数，C 为 xOy 平面上逐段光滑的闭曲线，证明

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$$

证 只需证 $f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ 是某个函数的全微分．令

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}f(x^2+y^2)2x=xf(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}f(x^2+y^2)2y=yf(x^2+y^2)$$

故
$$\mathrm{d}u=f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$

又 C 是闭曲线，故

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$$

注 此处不可以利用 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 证明，因为不知 f' 是否存在及连续．

例 24 设 Γ 是不自交的光滑闭曲线，求曲线积分 $\oint_\Gamma \mathrm{grad}(\mathrm{e}^{x^2+2y+z})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$．

解
$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma \mathrm{grad}(\mathrm{e}^{x^2+2y+z})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ =&\oint_\Gamma \mathrm{e}^{x^2+2y+z}\{2x,2,1\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}\\ =&\oint_\Gamma \mathrm{e}^{x^2+2y+z}\mathrm{d}(x^2+2y+z)\\ =&\oint_\Gamma \mathrm{d}\mathrm{e}^{x^2+2y+z}=0\end{aligned}$$

例 25 设曲线 L：$x^2+y^2+x+y=0$ 的方向为逆时针方向，证明

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\int_L -y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

证 曲线 L 为如图 39 所示的圆．

$$I=\int_L -y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D(\cos x^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

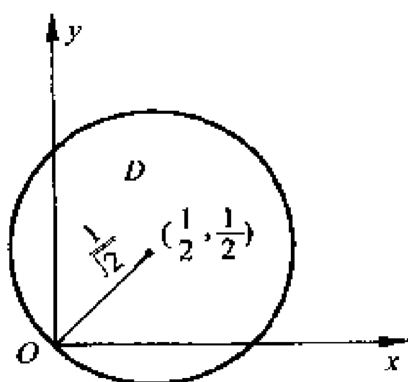


图 39

当$(x,y)\in D$时，有

$$|x|-\frac{1}{2}\leqslant\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$|x|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x^2\leqslant\frac{\pi}{2}$$

故有
$$\frac{\pi}{4}\leqslant x^2+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\leqslant\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$$

又 D 的面积 $A=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}$，故得

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\iint_D\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}$$

即 $\quad\frac{\pi}{2}\leqslant\int_L -y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

例 26 证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$

证 $X=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\quad Y=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$

在曲线 C：$x^2+y^2=R^2$ 上

$$\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{R}{(R^2+xy)^2}$$

$$\leqslant \frac{R}{(R^2 - |xy|)^2} \leqslant \frac{R}{\left(R^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{R}{\left(R^2 - \frac{R^2}{2}\right)^2} = \frac{4}{R^3}$$

又曲线 C 的长为 $L=2\pi R$，故

$$\left|\oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{4}{R^3}2\pi R = \frac{8\pi}{R^2}$$

故
$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0$$

例 27 设函数 $f(x),g(x)$具有二阶连续导数，曲线积分

$$\oint_C [y^2 f(x) + 2y\mathrm{e}^x + 2yg(x)]\mathrm{d}x + 2[yg(x) + f(x)]\mathrm{d}y = 0$$

其中 C 为平面上任一简单封闭曲线.

(1) 求 $f(x),g(x)$，使 $f(0)=g(0)=0$；

(2) 计算沿任一条曲线从点(0,0)到(1,1)的积分.

解 (1) 由$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$得

$$2yg'(x) + 2f'(x) = 2yf(x) + 2\mathrm{e}^x + 2g(x)$$

$$yg'(x) + f'(x) = yf(x) + \mathrm{e}^x + g(x)$$

比较 y 的同次幂系数得

$$\begin{cases} g'(x) = f(x) \\ f'(x) = g(x) + \mathrm{e}^x \end{cases}$$

$$g''(x) = f'(x) = g(x) + \mathrm{e}^x$$

$$g''(x) - g(x) = \mathrm{e}^x$$

解得
$$g(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^x$$

由 $g(0)=0,g'(0)=f(0)=0$，得 $C_1=-\frac{1}{4}$，$C_2=\frac{1}{4}$，

故

$$g(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

$$f(x) = g'(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

(2) 取如图 40 所示折线计算积分.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^1 2[yg(1) + f(1)]\mathrm{d}y$$

$$= g(1) + 2f(1) = \frac{7}{4}e - \frac{1}{4e}$$

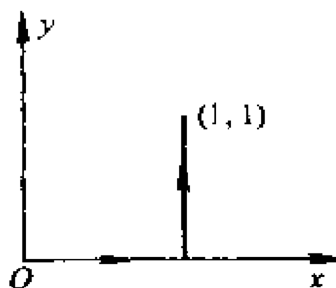


图 40

例 28 计算 $I = \int_C \frac{-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) - av \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(v \neq 0, 2\pi)$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 一段.

解 $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial y}$

除(0,0)外，X 与 Y 及其偏导数处处连续，C 是摆线的一拱.

当 $v<0$ 或 $v>2\pi$，C 如图 41 所示，则

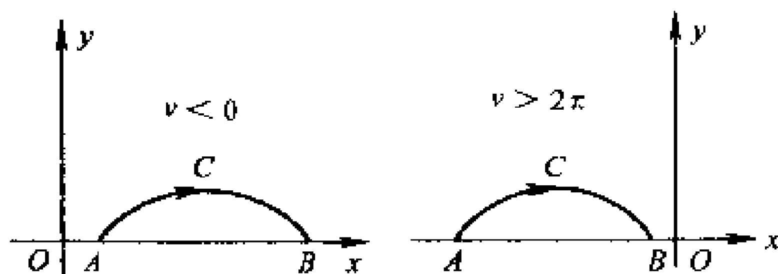


图 41

$$I = \int_{\overline{AB}} \frac{-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{\overline{AB}} 0\mathrm{d}x = 0$$

当 $0<v<2\pi$，C 如图 42 所示. 取 C_1：$x^2+y^2=\varepsilon^2(y\geqslant 0, \varepsilon$ 是

很小的正数），则

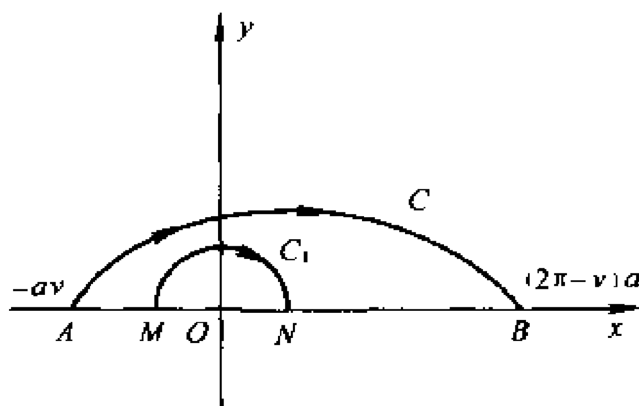


图 42

$$I=\int_{\overline{AM}+C_1+\overline{NB}} X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_{C_1}\frac{-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_1}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y \qquad \left(C_1:\begin{cases}x=\varepsilon\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}\right)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\pi}^{0}-\varepsilon\sin t(-\varepsilon\sin t)\mathrm{d}t+\varepsilon\cos t\cdot\varepsilon\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}t=-\pi$$

例 29 已知曲线积分 $\oint_L\frac{1}{\varphi(x)+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\equiv A$（$A$ 是常数），其中$\varphi(x)$是可导函数，且 $\varphi(1)=1$，L 是绕原点$(0,0)$一周的任意正向闭曲线，试求出 $\varphi(x)$及 A.

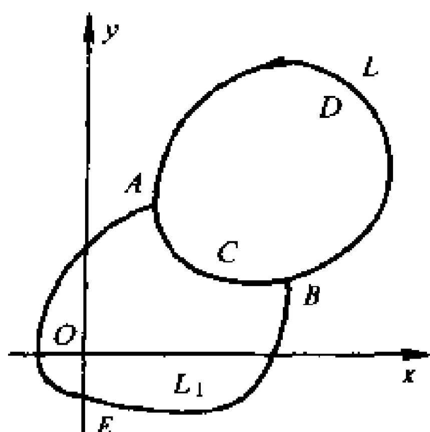


图 43

解 先证在任意不包含原点的单连通域内曲线积分与路径无关. 设 L 是任一不包含也不经过原点的闭曲线，如图 43，在 L 上取两点 A，B.

则 $L=\overset{\frown}{ACB}+\overset{\frown}{BDA}$，以 $\overset{\frown}{ACB}$ 为一部分取一围绕原点的闭曲线 $L_1=\overset{\frown}{AEBCA}$，则由题设

$$\oint_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{BDA}}+\int_{\overset{\frown}{ACB}}+\int_{\overset{\frown}{AEB}}-\int_{\overset{\frown}{AEB}}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{BDAEB}}-\oint_{\overset{\frown}{BCAEB}}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=A-A=0$$

故在任意不包含原点的单连通区域内曲线积分与路径无关，故

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$$

即

$$\frac{-\varphi(x)+y^2}{(\varphi(x)+y^2)^2}=\frac{\varphi(x)+y^2-x\varphi'(x)}{(\varphi(x)+y^2)^2}$$

$$x\varphi'(x)=2\varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{2\mathrm{d}x}{x}$$

$$\varphi(x)=Cx^2$$

由 $\varphi(1)=1$ 得 $C=1$，$\varphi(x)=x^2$.

取 L：$x^2+y^2=1$，设 D 是 L 所围区域，则

$$A=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$$

例 30 设函数 $f(x,y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续，且 $f(0,0)=0$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 2|x-y|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 2|x-y|$，证明 $|f(5,4)|\leqslant 1$.

证 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$

曲线积分 $\int_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 与路径无关，取如图 44 所示折线 $\overline{OAB}$，有

$$|f(5,4)|=|f(5,4)-f(0,0)|$$

$$= \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\int_{\overline{OA}} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right|$$

由于在$\overline{OA}$上，$y=x$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant 2|x-x|=0$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant 2|x-x|=0$，

$$|f(5,4)| = \left|\int_4^5 \frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_4^5 \left|\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_4^5 2|x-4|\mathrm{d}x = 1$$

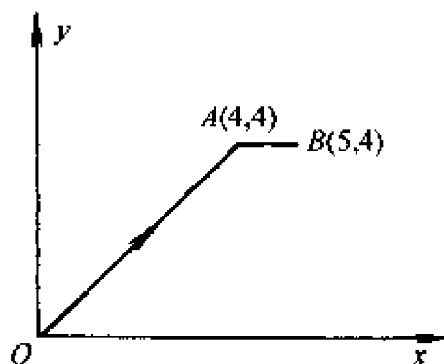


图 44

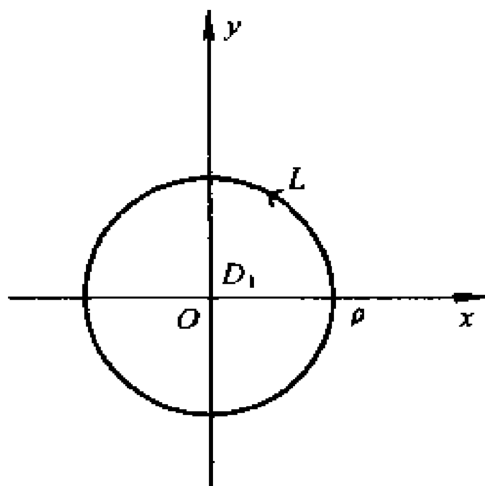


图 45

例 31 设函数 $f(x,y)$在区域D：$x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$，证明

$$\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

证 如图 45，设 L：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，D_1 为 L 所围区域.

$$\iint\limits_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta \cdot f'_x + \rho\sin\theta \cdot f'_y)\rho d\rho$$

（交换积分次序）

$$= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta \cdot f'_x + \rho\sin\theta \cdot f'_y) d\theta$$

$$= \int_0^1 \left[\oint_L - f'_y dx + f'_x dy \right] \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \left[\iint_{D_1} (f''_{x^2} + f''_{y^2}) dx dy \right] \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \left[\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right] \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} e^{-r^2} r dr \right] \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \pi(1 - e^{-\rho^2}) \rho d\rho = \frac{\pi}{2e}$$

例 32 设二元函数 u 在曲线 $L: \rho=1+\cos\theta$ 所围区域 D 上有二阶连续偏导数，且 $u''_{x^2}+u''_{y^2}=1$，试证 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dl = |D|$，其中 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 u 沿 D 的边界外向法线方向导数，$|D|$ 是 D 的面积.

解 如图 46，设 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$，$L$ 的正方向切向量为 $dl=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$，则 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$，故

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dl = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \right) dl$$

$$= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right) dl$$

$$= \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha \right) dl$$

$$= \oint_L - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |D|$$

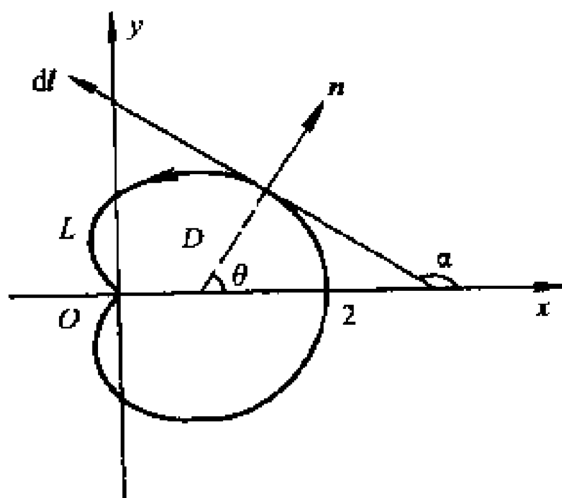


图 46

例 33 设空间曲线 C 由立方体 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 相截面成，试计算

$$I = \left| \oint_C (z^2 - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\mathrm{d}y + (y^2 - x^2)\mathrm{d}z \right|$$

解 如图 47，

$$AB:\begin{cases} z = 0 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}, BC:\begin{cases} y = 1 \\ x + z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

由轮换对称性

$$I = 3\left| \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} (z^2 - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\mathrm{d}y + (y^2 - x^2)\mathrm{d}z \right|$$

$$= 3\left| \int_1^{\frac{1}{2}} \left(0 - \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 \right) \mathrm{d}x + (x^2 - 0)(-\mathrm{d}x) + \right.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2}-1\right)\mathrm{d}x+(1-x^{2})(-\mathrm{d}x)\Bigg|$$

$$=3\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{9}{4}-3x+2x^{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{7}{4}-2x^{2}+x\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{9}{2}$$

本题也可以利用斯托克斯公式计算.

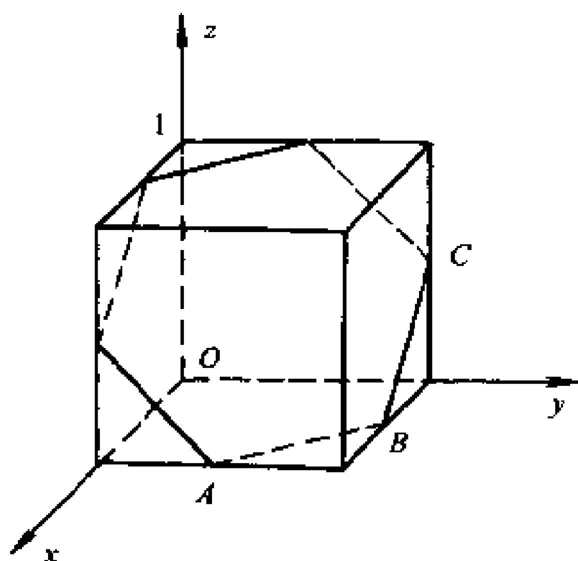


图 47

例 34 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\frac{\mathrm{d}S}{\sigma}$，其中 S：$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$，$\sigma$ 是原点到 S 上任一点 (x,y,z) 的切平面的距离.

解 S 在 (x,y,z) 处的切平面方程为

$$\frac{2x}{a^{2}}(X-x)+\frac{2y}{b^{2}}(Y-y)+\frac{2z}{c^{2}}(Z-z)=0$$

即
$$\frac{x}{a^{2}}X+\frac{y}{b^{2}}Y+\frac{z}{c^{2}}Z-1=0$$

故 $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}$

设 S_1： $z = c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$， D_{xy}： $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{c^2}{z}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I = 2\iint\limits_{S_1} \frac{\mathrm{d}S}{\sigma}$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} \frac{c^2}{c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{令\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}} 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2} + \frac{1-\rho^2}{c^2}\right)ab\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

例 35 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{S} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R$，$z = -R(R > 0)$ 所围成立体表面的外侧.

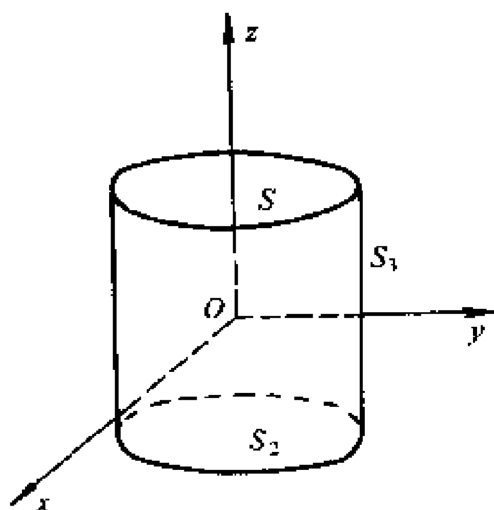


图 48

解 设立体的上、下底面及侧面分别为 S_1、S_2、S_3，则

$$I=\iint\limits_{S_1(\text{上})}+\iint\limits_{S_2(\text{下})}+\iint\limits_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{(-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+(-R)^2}+$$

$$\iint\limits_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=\oiint\limits_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}-\iint\limits_{S_1(\text{上})}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}-\iint\limits_{S_2(\text{下})}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=\iiint\limits_{V}\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}V \qquad (V\text{ 是 }S\text{ 所围区域})$$

$$=\int_{-R}^{R}\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-R}^{R}\frac{1}{R^2+z^2}\pi R^2\mathrm{d}z=\frac{\pi^2 R}{2}$$

例 36 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面，都有

$$\oiint\limits_{S}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

解 由题设及高斯公式，对 $x>0$ 内的任意空间有界闭区域 V，设它的表面为 S，有

$$0=\oiint\limits_{S^{\pm}}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iiint_V (xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}) dV$$

由已知条件，该三重积分的被积函数是连续函数，又由于 V 的任意性，得

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 \quad (x > 0)$$

$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) f(x) = \frac{1}{x} e^{2x}$$

其通解为

$$f(x) = e^{-\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}\left[C + \int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx} dx\right]$$

$$= \frac{e^{2x} + Ce^{x}}{x}$$

由
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^{x}}{x} = 0$$

得
$$\lim_{x \to 0^+} (e^{2x} + Ce^{x}) = 0$$

故 $1+C=0$，$C=-1$，因此

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{x}}{x}$$

例 37 计算曲面积分 $I = \iint_{S^+} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$，其中 S^+ 是曲面 $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16}$ $(z \geqslant 0)$ 的上侧.

解 除原点外，X，Y，Z 及其偏导数连续，且

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

如图 49，取 S_1：$z = \sqrt{\varepsilon^2 - x^2 - y^2}$（$\varepsilon$ 是较小正数），将 xOy 面上位于 S_1 与 S 的边界曲线之间的部分记为 S_2，设 S，S_1，S_2 所围空间区域为 V，记 xOy 平面上由 S_1 的边界所围部分为 S_3，设 S_1 与 S_3 所围半球体区域为 V_1，则有

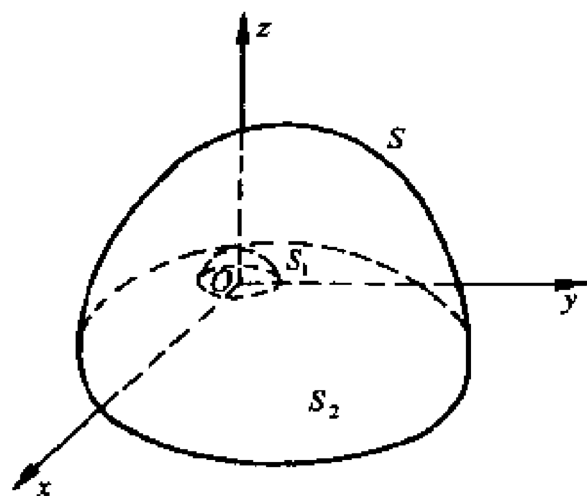


图 49

$$I=\oiint\limits_{S^++S_1^-+S_2^-}-\iint\limits_{S_1^-}-\iint\limits_{S_2^-}X\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_1^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\varepsilon^3}-0$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\left[\oiint\limits_{S_1^++S_3^-}-\iint\limits_{S_3^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{V_1}3\mathrm{d}V-0$$

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=2\pi$$

例 38 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 S 是简单光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线向量，$\boldsymbol{r}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，且$(x_0,y_0,z_0)$不在 S 上.

解 $I = \oiint\limits_S \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{n}|}}{r^2}\mathrm{d}S = \oiint\limits_S \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}^0}{r^3}\mathrm{d}S$

$$= \oiint\limits_S \frac{(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma}{r^3}\mathrm{d}S$$

$$= \oiint\limits_{S(外)} \frac{(x - x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - y_0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 记

$$X = \frac{x - x_0}{r^3},\quad Y = \frac{y - y_0}{r^3},\quad Z = \frac{z - z_0}{r^3}$$

有
$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

当 (x_0, y_0, z_0) 在 S 外部时，设 S 所围区域为 V，则

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 0$$

当 (x_0, y_0, z_0) 在 S 内部时，取

$S_1: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0)$

当 ε 很小时，S_1 在 S 内部，设 S_1 所围区域为 V_1，S_1 与 S_2 所围区域为 V'，则

$$I = \oiint\limits_{S(外)+S_1(内)} - \oiint\limits_{S_1(内)} X\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{V'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V +$$

$$\oiint\limits_{S_1(外)} \frac{(x - x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - y_0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\varepsilon^3}$$

$$= 0 + \frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{S_1(外)} (x - x_0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - y_0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{V_1} 3\mathrm{d}V = \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi$$

例 39 设 V 是一空间有界开区域，S 是 V 的边界曲面，函数 $u(x,y,z)$ 在闭区域 $V\cup S$ 上有一阶连续非负偏导数，且在 S 上 $u\equiv 0$，证明在 V 内 $u\equiv 0$.

证 由题设及高斯公式

$$0 = \iint\limits_S u\mathrm{d}y\mathrm{d}z + u\mathrm{d}z\mathrm{d}x + u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}V$$

由于 u 的偏导数连续且非负，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

故 $u\equiv C$，又在 S 上 $u\equiv 0$，故在 V 内 $u\equiv 0$.

例 40 求 $I = \oint_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y - (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax\ (b > a > 0)$ 的交线 $(z \geqslant 0)$，L 的方向规定为沿 L 的方向运动时，从 z 轴正向往下看．曲线 L 所围球面部分总在左边.

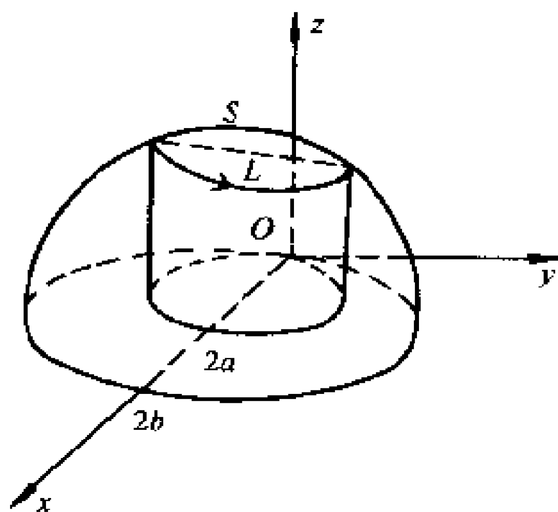


图 50

解 设 L 所围球面部分为 S，S 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，由斯托克斯公式

$$I=\iint\limits_{S^+}(2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{S}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

S 的法向量为$\{2x-2b,2y,2z\}$，故在 S^+上

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x-b}{b},\frac{y}{b},\frac{z}{b}\right\}$$

$$I=2\iint\limits_{S}\left[(y-z)\frac{x-b}{b}+(z-x)\frac{y}{b}+(x-y)\frac{z}{b}\right]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint\limits_{S}(z-y)\mathrm{d}S \qquad (S\text{ 关于 }zOx\text{ 面对称})$$

$$=2\iint\limits_{S}z\mathrm{d}S=2b\iint\limits_{S}\frac{z}{b}\mathrm{d}S$$

$$=2b\iint\limits_{S}\cos\gamma\mathrm{d}S=2b\iint\limits_{S^+}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2b\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2b\cdot\pi a^2=2\pi a^2b$$

例 41 设螺旋面 S：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=h\theta$，其中 $0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，试求该曲面面积.

解 三个方程两边取全微分：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}z=h\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

解得
$$\mathrm{d}z=-\frac{h}{r}\sin\theta\mathrm{d}x+\frac{h}{r}\cos\theta\mathrm{d}y$$

故
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1 + \left(-\frac{h}{r}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{h}{r}\cos\theta\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

因此曲面面积为(设 S 在 xOy 面上投影区域为 D_{xy})

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, r\mathrm{d}r$$

$$= \pi\left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\right)$$

例 42 求曲线 AB(图 51)的方程，使图形 $OABC$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的形心的横坐标等于 B 点横坐标的 4/5.

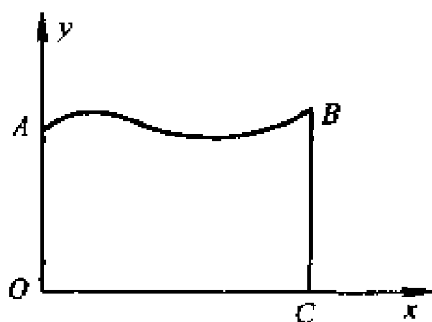


图 51

解 设 AB : $y=f(x)$，C 点横坐标为 x，旋转体及其体积都记为 V，由题意

$$\frac{\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V} = \frac{4}{5}x$$

由于 $$V = \int_0^x \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^x x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^x x\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

故有 $$\int_0^x xf^2(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x$$

两边对 x 求导

$$xf^2(x) = \frac{4}{5}x\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{5}xf^2(x)$$

$$xf^2(x) = 4\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x$$

两边对 x 求导

$$f^2(x) + 2xf(x)f'(x) = 4f^2(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \frac{3}{2x}\mathrm{d}x$$

因此得　$f(x)=Cx^{\frac{3}{2}}$　(C 是任意常数)

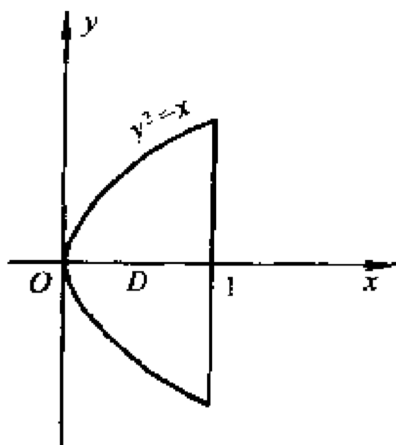


图 52

例 43　求由曲线 $y^2=x$ 与直线 $x=1$所围的均匀薄片(面密度为 1)绕过原点的任一直线的转动惯量，并讨论该转动惯量的最大值与最小值.

解　设过原点的直线方程为 $y=kx$，则薄片上任一点(x,y)到该直线的距离为

$$d=\frac{|y-kx|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$J(k)=\iint_D d^2\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{(y-kx)^2}{1+k^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\frac{(y-kx)^2}{1+k^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4(15k^2+7)}{105(k^2+1)}$$

$$J'(k)=\frac{64k}{105(k^2+1)^2}$$

令 $J'(k)=0$，得 $k=0$.

当 $k<0$，$J'(k)<0$；当 $k>0$，$J'(k)>0$，故

$J(0)=\frac{4}{15}$　为最小值，

$\lim\limits_{k\to\infty}J(k)=\frac{4}{7}$　为最大值.

即 J_x 为最小值，J_y 为最大值.

例 44　一块均匀的平面薄片以任意方式沉浸在液体中，试证板一侧所受液体的侧压力等于当此板水平放在和它的质心同样深度时板上液柱的重量.

证　设液体的密度为 μ. 当薄片 D 垂直液面时，如图 53 建立坐标系，则侧压力

$$p=\iint_D \mu g x \mathrm{d}\sigma$$

质心深度

$$\bar{x}=\frac{\iint_D \mu x \mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu \mathrm{d}\sigma}$$

故液柱重量

$$W=\bar{x}\mu g\iint_D \mathrm{d}\sigma=\iint_D \mu g x \mathrm{d}\sigma=p$$

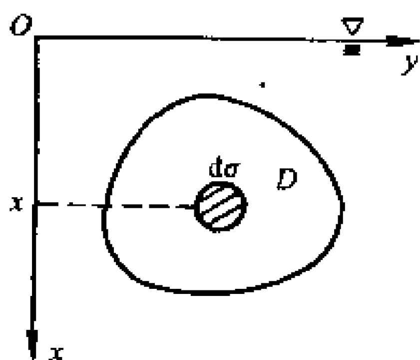


图 53

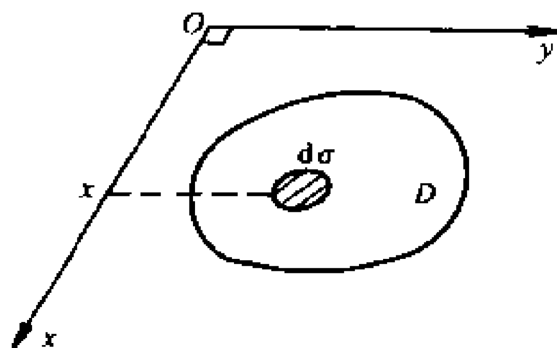


图 54

当薄片 D 与液面倾斜成 α 角时，如图 54 建立坐标系(xOy 面

与液面夹角为 α)，则面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 在液体中的深度为 $x\sin\alpha$，故

$$\mathrm{d}p = \mu g(x\sin\alpha)\mathrm{d}\sigma$$

侧压力

$$p = \iint_D \mu g x\sin\alpha\mathrm{d}\sigma = \sin\alpha\iint_D \mu g x\mathrm{d}\sigma$$

质心的 x 坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D \mu x\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu\mathrm{d}\sigma}$$

质心深度为 $\bar{x}\sin\alpha$，故液柱重量

$$W = (\bar{x}\sin\alpha)\mu g\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sin\alpha\frac{\iint_D \mu x\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\mu g\iint_D \mathrm{d}\sigma$$

$$= \sin\alpha\iint_D \mu g x\mathrm{d}\sigma = p$$

例 45 求均匀球壳对不在球壳上一单位质点 P 的引力.

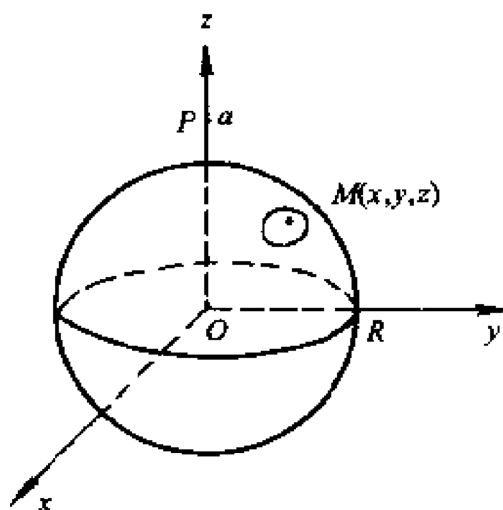


图 55

解 如图 55 建立坐标系，设球面方程为

$$S:\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

质点 $P(0,0,a)$，球面面密度为 μ.

取曲面面积微元 $\mathrm{d}S$，$M(x,y,z)$是 $\mathrm{d}S$ 上一点，则有

$$\mathrm{d}F = G\frac{\mu\mathrm{d}S}{x^2 + y^2 + (z-a)^2}$$

由对称性及球面是均匀的，有

$$F_x = 0, F_y = 0$$

$$\mathrm{d}F_z = \mathrm{d}F \frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

$$= G\mu \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\mathrm{d}S$$

球面的参数方程为

$$x = R\cos\theta\sin\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\varphi$$

如图 56 有

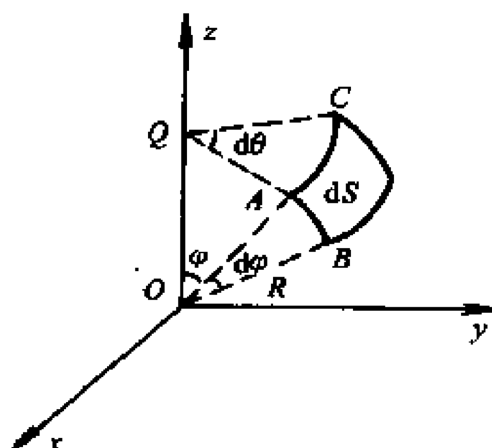


图 56

$$\mathrm{d}S = \overset{\frown}{AB} \cdot \overset{\frown}{AC} = (R\mathrm{d}\varphi)(QA\mathrm{d}\theta) = R\mathrm{d}\varphi \cdot (R\sin\varphi\mathrm{d}\theta)$$

$$= R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$F_z = \iint_S G\mu \frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\mathrm{d}S$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} G\mu \frac{R\cos\varphi - a}{(R^2-2aR\cos\varphi+a^2)^{3/2}} R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi G\mu R^2\int_0^{\pi} \frac{a-R\cos\varphi}{(R^2-2aR\cos\varphi+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\cos\varphi$$

(令 $t = \sqrt{R^2-2aR\cos\varphi+a^2}$)

$$= 2\pi G\mu R^2\int_{|R-a|}^{R+a} \frac{a-\frac{1}{2a}(R^2+a^2-t^2)}{t^3}\,\frac{-2t}{2aR}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi G\mu R}{a^2}\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0 & R > a \\ -\dfrac{4\pi G\mu R^2}{a^2} & R < a \end{cases}$$

故当 $R>a$，$\boldsymbol{F}=\{0,0,0\}$，当 $R<a$，

$$\boldsymbol{F}=\left\{0,0,-\frac{4\pi G\mu R^2}{a^2}\right\}$$

例 46 设有一半径为 R，高为 H 的圆柱形容器，盛有 $\frac{2}{3}H$ 高的水，放在离心机上高速旋转，因受离心力的作用，水面呈抛物面形，问当水刚要溢出容器时，液面的最低点在何处？

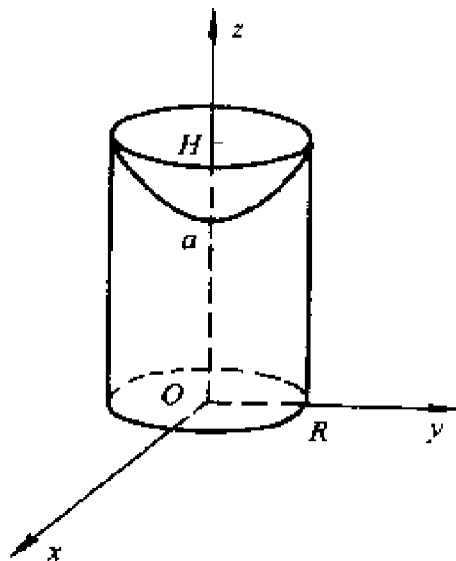


图 57

解 如图 57 建立坐标系，设液面最低点在 $z=a$ 处，由题设，旋转抛物面方程为

$$\frac{H-a}{R^2}(x^2+y^2)=z-a$$

故水的体积为

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\left(a+\frac{H-a}{R^2}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(a+\frac{H-a}{R^2}\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}R^2(H+a)$$

又由已知 $$V=\pi R^2\cdot\frac{2}{3}H=\frac{2\pi}{3}R^2H$$

故 $$\frac{\pi}{2}R^2(H+a)=\frac{2\pi}{3}R^2H$$

解得 $$a=\frac{H}{3}$$

例 47 把均匀的旋转抛物形体：$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 放在水平的桌面上，证明当物体处于稳定平衡时，它的轴线与桌面的夹角为 $\theta=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$.

解 当质心最低时物体处于稳定平衡. 先求出 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 的质心.

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \mathrm{d}V}=\frac{\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^1 z\pi z\mathrm{d}z}{\int_0^1 \pi z\mathrm{d}z}=\frac{2}{3}$$

故质心为$\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$.

取中心截面如图 59，其中抛物线方程为 $z=x^2$. 设(x,x^2)是抛

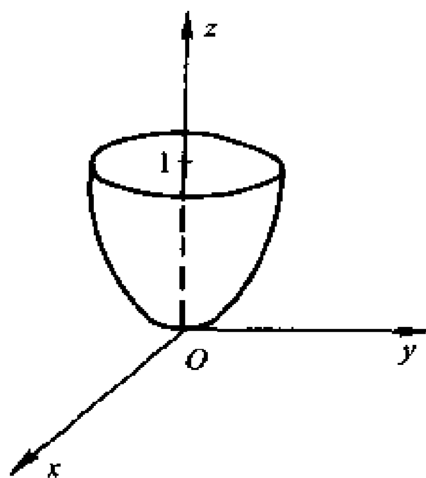


图 58

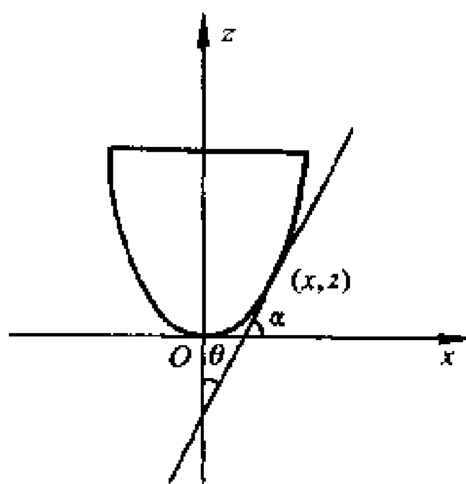


图 59

物线上任一点，过此点的切线方程为

$$Z - x^2 = 2x(X - x)$$

即
$$2xX - Z - x^2 = 0$$

质心到此切线的距离为

$$d = \frac{\left| -\frac{2}{3} - x^2 \right|}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{x^2 + \frac{2}{3}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

令
$$f(x) = d^2 = \frac{9x^4 + 12x^2 + 4}{36x^2 + 9} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

由
$$f'(x) = \frac{36x(18x^4 + 9x^2 - 2)}{(36x^2 + 9)^2} = 0$$

得
$$x^2 = \frac{1}{6}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

由实际问题，d 确有最小值，故当 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$时，d 取得最小值，此时切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x = \sqrt{\frac{2}{3}} = \tan\alpha$$

由于 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$，故有

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \theta = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$$

例 48 设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为 cm，时间单位为 h），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数为0.9），问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间？

解 首先求 $h(t)$的表达式. 设雪堆体积为 V，侧面积为 S. 雪堆侧面方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \tag{1}$$

即
$$x^2+y^2=\frac{1}{2}(h^2(t)-h(t)z)$$

$$D_{xy}:\quad x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)$$

雪堆体积

$$V(t)=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}(h^2(t)-h(t)z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{h(t)}\pi\cdot\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

由(1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x}{h(t)},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{h(t)}$$

雪堆的侧面积

$$S(t)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\rho\sqrt{1+\frac{16\rho^2}{h^2(t)}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{h(t)}\frac{1}{24}(h^2(t)+16\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题设$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，故

$$\frac{3\pi}{4}h^2(t)h'(t)=-0.9\cdot\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

$$h'(t)=-\frac{13}{10},\quad h(t)=-\frac{13}{10}t+C$$

由 $h(0)=130$ 得 $C=130$，故

$$h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)=0$，即 $-\frac{13}{10}t+130=0$，得 $t=100\mathrm{h}$. 故雪堆全部融化需要 100h.

例 49 某仪器上有一只圆柱形的无盖水桶，桶高 6cm，半径为 1cm，在桶壁上钻有两个小孔用于安装支架，使水桶可以自由倾斜，两个小孔距桶底 2cm，且两孔连线恰为直径，水可以从两个小孔向外流出，当水桶以不同角度倾斜放置且没有水漏出时，这时水桶最多可装多少水？

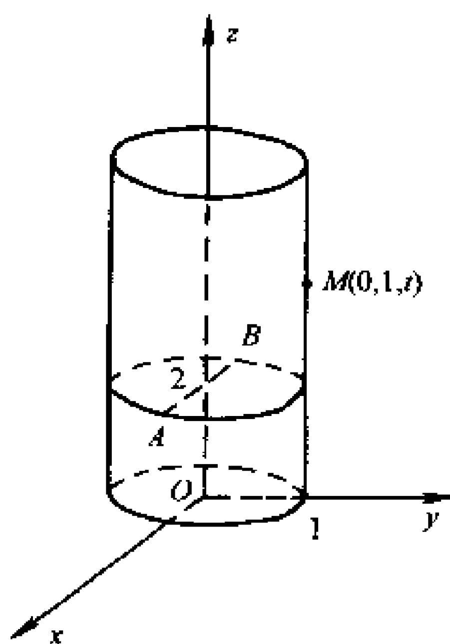


图 60

解 如图 60 建立坐标系，设两孔位置为 $A(1,0,2)$，$B(-1,0,2)$，桶向 y 轴正方向倾斜时，水面所在平面经过 A，B 及点 $M(0,1,t)$ $(2\leqslant t\leqslant 6)$，经过此三点的平面方程为

$$(t-2)y-z+2=0$$

由于 $z\geqslant 0$，故有 $y\geqslant -\frac{2}{t-2}$. 设水桶中水的容积为 $V(t)$，则当 $2\leqslant t\leqslant 6$ 时，$V(t)$ 为以 $z=(t-2)y+2$ 为顶部函数的曲顶柱体体积，即

$$V(t)=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant -\frac{2}{t-2}}}[(t-2)y+2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}[(t-2)y+2]\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}[(t-2)y+2]\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= 2t\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y + 4\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1}(1-y)\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$V'(t) = 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y - \left[2t\frac{-2}{t-2}\sqrt{1-\left(\frac{-2}{t-2}\right)^2} + 4\left(1-\frac{-2}{t-2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{-2}{t-2}\right)^2}\right]\left(\frac{-2}{t-2}\right)'$$

$$= 2\int_{-\frac{2}{t-2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3}\frac{[t(t-4)]^{\frac{3}{2}}}{(t-2)^3} \qquad (2 \leqslant t \leqslant 6)$$

令 $V'(t)=0$，得 $t=4$.

$$V(4) = 8\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y + 4\int_{-1}^{1}(1-y)\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y = 2\pi$$

$$V(6) = 12\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y + 4\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(1-y)\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$$

$$V(2) = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$$

比较 $V(2)$,$V(4)$,$V(6)$的值，得

$$V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$$

第六章　常微分方程

一、内容要点

本章内容包括求解常微分方程与积分方程，线性微分方程解的性质与结构，及利用微分方程解决一些几何问题与物理问题等.

求解常微分方程重要的是判断方程为哪种类型. 有些方程需要做变量代换，有些方程需视 y 为自变量，x 为函数.

积分方程一般可通过求导化成微分方程，此时要注意找出初始条件.

利用微分方程解决实际问题时，若是几何问题，要根据问题的几何特性建立微分方程，若是物理问题，要根据某些物理定律建立微分方程，也有些问题要利用微元法建立微分方程.

二、例题选讲

例 1　用初等函数及它们的不定积分表示出微分方程

$$y''-xy'-y=0$$

的一般解.

解　方程可化成

$$(y'-xy)'=0$$

故
$$y'-xy=C_1 \qquad \text{(一阶线性方程)}$$

因此方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int -x\mathrm{d}x}\left(C_2+\int C_1 e^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\ &= e^{x^2/2}\left(C_2+C_1\int e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

例 2　求 $(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$ 的通解.

解 1 显然 $y_1(x)=x$ 是方程的一个解.

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx=x\int\frac{e^{-\int\frac{-x}{x^2\ln x}dx}}{x^2}dx$$

$$=x\int\frac{\ln x}{x^2}dx=x\int\ln x d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=x\left[-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx\right)$$

$$=-\ln x-1+C \qquad (\text{取 } C=0)$$

故通解为

$$y=C_1x+C_2(\ln x+1)$$

解 2 令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

代入原方程得

$$t\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}-y\right)=0$$

令 $u=\dfrac{dy}{dt}-y$，方程化为

$$t\frac{du}{dt}-u=0$$

解得 $$u=Ct$$

即 $$\frac{dy}{dt}-y=Ct$$

$$y=e^{-\int-dt}\left(C_2+\int Cte^{\int-dt}dt\right)$$

$$=C_2e^t-C(t+1) \qquad (\text{记 } C_1=-C)$$

$$=C_2x+C_1(\ln x+1)$$

例 3 解方程$(4x-1)^2y''-2(4x-1)y'+8y=0$.

解 方程是欧拉方程. 令 $4x-1=e^t$，则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{4}{4x-1}\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned}y''&=\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{4x-1}\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{-4^2}{(4x-1)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{4}{4x-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\\&=\frac{16}{(4x-1)^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\end{aligned}$$

代入方程得

$$2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$2r^2-3r+1=0$$

$$r_1=1,\quad r_2=\frac{1}{2}$$

故通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2}=C_1(4x-1)+C_2\sqrt{4x-1}$$

例 4 解方程 $x^3+(y')^3-3xy'=0$.

解 若令 $p(x)=y'$，不易将 p 解出，故采用参数方法求解.

令 $x=\frac{3t}{1+t^3}$，则 $y'=\frac{3t^2}{1+t^3}$

$$dy=y'dx=\frac{3t^2}{1+t^3}d\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)=\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt$$

$$y=\int\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt=\frac{12t^3+3}{2(1+t^3)^2}+C$$

故方程的通解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\[2ex]y=\dfrac{12t^3+3}{2(1+t^3)^2}+C\end{cases}$$

例 5 已知方程 $y''+(x+e^{2y})(y')^3=0$.

(1) 若把 x 看成函数，y 看成自变量，则方程化成什么形式?

(2) 求此方程的解.

解 (1) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'}$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(1\Big/\frac{dx}{dy}\right)=\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right)\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=-\frac{d^2x}{dy^2}\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=\frac{-x''}{(x')^3}$$

代入方程得

$$x''-x=e^{2y}$$

(2) $r^2-1=0$, $r=\pm1$

$$\bar{x}=C_1e^y+C_2e^{-y}$$

设 $x^*=Ae^{2y}$，代入方程得 $A=1/3$，故

$$x^*=\frac{1}{3}e^{2y}$$

方程的通解为

$$x=C_1e^y+C_2e^{-y}+\frac{1}{3}e^{2y}$$

例 6 若方程 $y''-\frac{1}{x}y'+q(x)y=0$ 有两个特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，且 $y_1y_2=1$，求 $q(x)$ 及方程的通解.

解 若 $y_1\equiv C$，由于 $y_1y_2=1$，故 $C\neq0$，代入方程得

$$q(x)C=0,\quad q(x)\equiv0$$

方程成为

$$y''-\frac{1}{x}y'=0$$

令 $y'=p(x)$，得 $p'(x)-\frac{1}{x}p(x)=0$

解得 $p(x)=C_1x$，即 $y'=C_1x$，故方程的通解为

$$y=\frac{C_1}{2}x^2+C_2$$

若 $y_1 \neq C$，则 $y_2=1/y_1$ 与 y_1 线性无关. 将 $y_1, 1/y_1$ 分别代入方程得

$$y_1''-\frac{1}{x}y_1'+q(x)y_1=0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{y_1}\right)''-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y_1}\right)'+q(x)\frac{1}{y_1}=0$$

即

$$\frac{2(y_1')^2}{y_1^3}-\frac{1}{y_1^2}\left(y_1''-\frac{1}{x}y_1'\right)+q(x)\frac{1}{y_1}=0 \tag{2}$$

由(1)得 $$y_1''-\frac{1}{x}y_1'=-q(x)y_1$$

代入(2)得

$$\frac{2(y_1')^2}{y_1^3}-\frac{1}{y_1^2}(-q(x)y_1)+q(x)\frac{1}{y_1}=0$$

解得 $$q(x)=-\frac{(y_1')^2}{y_1^2}$$

代入(1)得

$$y_1''-\frac{1}{x}y_1'-\frac{(y_1')^2}{y_1^2}y_1=0$$

即

$$\frac{y_1''}{y_1}-\frac{1}{x}\frac{y_1'}{y_1}-\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2=0 \tag{3}$$

令 $z=\frac{y_1'}{y_1}$，则

$$\frac{dz}{dx}=\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)'=\frac{y_1''y_1-(y_1')^2}{y_1^2}=\frac{y_1''}{y_1}-\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2$$

代入(3)得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=0$$

解得 $z=2kx$，故 $\frac{y_1'}{y_1}=2kx$，解得

$$y_1=k_1e^{kx^2}$$

取 $k_1=1$，$y_1=e^{kx^2}$，于是 $y_2=e^{-kx^2}$，故

$$q(x)=-\left(\frac{2kxe^{kx^2}}{e^{kx^2}}\right)^2=-4k^2x^2$$

方程的通解为

$$y=C_1e^{kx^2}+C_2e^{-kx^2}\quad (k\text{ 为任意非零常数})$$

例7 设 $f(x)$二阶可导，且 $f'(x)=f(1-x)$，求 $f(x)$.

解 方程两边对 x 求导

$$f''(x)=-f'(1-x)=-f(1-(1-x))=-f(x)$$

$$f''(x)+f(x)=0$$

$$r^2+1=0,\quad r=\pm i$$

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

由 $f'(1)=f(0)$，得 $C_2=\frac{1+\sin 1}{\cos 1}C_1$，故

$$f(x)=C_1\left(\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right)$$

例8 设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,\quad f(0)=1$$

求 $f'(x)$.

解 将已知方程化成

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0 \qquad (1)$$

两边对 x 求导得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}f'(x)}{f'(x)}=-\frac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x=-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$\ln|f'(x)|=-(x+\ln(x+1))+C_1$$

$$f'(x)=\frac{C}{(x+1)e^x}$$

由于 $f(0)=1$，故由(1)式有 $f'(0)=-1$，故 $C=-1$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)e^x}$$

例9 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(1)=3$，且

$$\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (x>0, y>0)$$

求 $f(x)$.

解 方程两边对 x 求偏导

$$f(xy)y = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t + yf(x)$$

两边对 y 求偏导

$$f'(xy)xy + f(xy) = f(y) + f(x)$$

令 $y=1$，得

$$f'(x)x + f(x) = 3 + f(x)$$

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = 3\ln x + C$$

由 $f(1)=3$，得 $C=3$，故

$$f(x) = 3\ln x + 3$$

例10 设 f 是可导函数，对于任意实数 s，t，有

$$f(s+t) = f(s) + f(t) + 2st$$

且 $f'(0)=1$，求 f 的表达式.

解 在已知方程中令 $s=0$ 得

$$f(t) = f(0) + f(t)$$

故 $f(0)=0$，已知方程两边对 s 求偏导

$$f'(s+t) = f'(s) + 2t$$

令 $s=0$，得

$$f'(t) = f'(0) + 2t = 1 + 2t$$

$$f(t) = t + t^2 + C$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，故

$$f(t) = t + t^2$$

例 11 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且满足方程

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

$x_1 \neq x_2$，且 x_1，$x_2 \in [a,b]$，求 $f(x)$.

解 当 $x \in (a,b]$，由已知条件有

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(a)+f(x)]$$

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{x-a}{2}[f(a)+f(x)]$$

两边对 x 求导

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(a)+f(x)] + \frac{x-a}{2}f'(x)$$

即
$$f'(x) - \frac{1}{x-a}f(x) = -\frac{f(a)}{x-a}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x}\left[C + \int -\frac{f(a)}{x-a}\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= C(x-a) + f(a)$$

令 $x=b$，得 $C=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故

$$f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

例 12 求满足方程 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 的所有可微函数.

解 在已知方程中令 $y=0$ 得

$$f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$$

$$f(0)(1+f^2(x)) = 0,\quad f(0)=0$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(\Delta x)(1+f^2(x))}{\Delta x(1-f(x)f(\Delta x))}$$

令 $\Delta x \to 0$，两边取极限得

$$f'(x) = f'(0)[1 + f^2(x)]$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1 + f^2(x)} = f'(0)\mathrm{d}x$$

$$\arctan f(x) = f'(0)x + C_1$$

$$f(x) = \tan(f'(0)x + C_1) \quad (\text{记 } f'(0) = C_2)$$

$$f(x) = \tan(C_2 x + C_1)$$

例 13 设 $f(x)$是在$(-\infty, +\infty)$二阶可导函数，试求方程

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$$

的解.

解 在已知方程中令 $x=y=0$，得

$$f^2(0) = 0, \quad f(0) = 0$$

已知方程两边对 x 求偏导

$$2f(x)f'(x) = f'(x+y)f(x-y) + f(x+y)f'(x-y)$$

两边对 y 求偏导

$$0 = f''(x+y)f(x-y) - f'(x+y)f'(x-y) + f'(x+y)f'(x-y) - f(x+y)f''(x-y)$$

$$f''(x+y)f(x-y) = f(x+y)f''(x-y)$$

令 $u=x+y$，$v=x-y$，得

$$f''(u)f(v) = f(u)f''(v)$$

当 $f(x) \neq 0$ 时，取一点 v，使 $f(v) \neq 0$，令 $C = f''(v)/f(v)$，有

$$f''(u) = Cf(u)$$

$$f''(u) - Cf(u) = 0$$

解得

$$f(u) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{C}x} + C_2 e^{-\sqrt{C}x} & C > 0 \\ C_1 u + C_2 & C = 0 \\ C_2 \cos\sqrt{-C}x + C_1 \sin\sqrt{-C}x & C < 0 \end{cases}$$

由 $f(0)=0$ 得当 $C>0$ 时，$C_1 = -C_2$；当 $C=0$ 时，$C_2=0$；当 $C<$

0 时，$C_2=0$，故

$$f(x)=\begin{cases}C_1(e^{\sqrt{C}x}-e^{-\sqrt{C}x}) & C>0\\ C_1x & C=0\\ C_1\sin\sqrt{-C}x & C<0\end{cases}$$

其中 C_1 为任意常数.

例 14 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上有定义，在$(0,+\infty)$内可导，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$f(0)=g(0)=1$，又当 $x>0$ 时，$f(x)+g(x)=3x+2$，$f'(x)-g'(x)=1$，$f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$，求 $f(x)$与 $g(x)$的表达式.

解
$$f(x)+g(x)=3x+2 \tag{1}$$

两边对 x 求导

$$f'(x)+g'(x)=3$$

与 $f'(x)-g'(x)=1$ 联立解得

$$f'(x)=2,\quad g'(x)=1$$

$$f(x)=2x+C_1,\quad g(x)=x+C_2\qquad(x\geqslant 0)$$

由 $f(0)=g(0)=1$，得 $C_1=1$，$C_2=1$，故当 $x\geqslant 0$，

$$f(x)=2x+1,\quad g(x)=x+1$$

由
$$g'(-2x)=f'(2x)+12x^2-1$$
$$=2+12x^2-1=12x^2+1$$

得
$$g'(x)=3x^2+1\qquad(x<0)$$
$$g(x)=x^3+x+C_3$$

由 $g(0)=1$，$C_3=1$，故

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\ x^3+x+1 & x<0\end{cases}$$

例 15 设函数 $f(x)$，$g(x)$满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$$

解 由已知方程得

$$f''(x) = g'(x) = 2e^x - f'(x)$$

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = g(0) = 2 \end{cases}$$

$$r^2 + 1 = 0, \quad r = \pm i$$

$$\overline{f}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

设 $f^*(x)=Ae^x$，代入方程得 $A=1$，故 $f^*(x)=e^x$，因此通解为

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x$$

由初始条件得 $C_1=-1$，$C_2=1$，故

$$f(x) = \sin x - \cos x + e^x$$

$$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx = \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx = \int_0^\pi d\,\frac{f(x)}{1+x}$$

$$= \frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^\pi = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - \frac{f(0)}{1+0}$$

$$= \frac{1+e^\pi}{1+\pi}$$

例 16 设线性方程 $u'(t)=a(t)u(t)$，$u(0)=C$，而 $v(t)$ 满足 $v'(t)\geqslant a(t)v(t)$，$v(0)=C$，$0\leqslant t\leqslant T$，证明当 $0\leqslant t\leqslant T$，$v(t)\geqslant u(t)$.

证 令 $v'(t)-a(t)v(t)=f(t)$，则 $f(t)\geqslant 0$.

$$v(t) = e^{\int_0^t a(t)dt}\left[C + \int_0^t f(t)e^{-\int_0^t a(t)dt}dt\right] \geqslant Ce^{\int_0^t a(t)dt}$$

由 $u'(t)=a(t)u(t)$ 及 $u(0)=C$ 得

$$u(t) = Ce^{\int_0^t a(t)dt}$$

故

$$v(t) \geqslant u(t)$$

例 17 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 的两个不同的解，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 是连续函数，证明：对于方程的任一解 $y(x)$ 都有等式

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C$$

成立，其中 C 是常数.

证 由题设

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$$
$$y_2' + P(x)y_2 = Q(x)$$

两式相减得

$$\frac{\mathrm{d}(y_2 - y_1)}{\mathrm{d}x} + P(x)(y_2 - y_1) = 0$$

$$y_2 - y_1 = C_1\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

由于 $y_1(x) \neq y_2(x)$，故 $C_1 \neq 0$. 同样可得

$$y - y_1 = C_2\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

故有
$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{C_2}{C_1} \xlongequal{\text{def}} C$$

例 18 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均为非齐次线性方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)$$

的特解，其中 $P_1(x), P_2(x), Q(x)$ 为已知函数，且 $\dfrac{y_2(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_1(x)} \neq$ 常数，试证明

$$y(x) = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$$

为给定方程的通解.

证 $y(x)$ 的表达式可化成

$$y(x) = y_1(x) + C_1(y_2(x) - y_1(x)) + C_2(y_3(x) - y_1(x))$$

由题设可知，$y_2(x) - y_1(x)$ 与 $y_3(x) - y_1(x)$ 都是相应的齐次方程的解，又由于

$$\frac{y_2(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_1(x)} \neq \text{常数}$$

所以 $y_2(x) - y_1(x)$ 与 $y_3(x) - y_1(x)$ 线性无关，因此

$$C_1(y_2(x) - y_1(x)) + C_2(y_3(x) - y_1(x))$$

是相应的齐次方程的通解，故 $y(x)$ 是给定方程的通解.

例 19 设微分方程

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

有解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$，使 $y_1^2(x)+y_2^2(x)+y_3^2(x)=1$ 对所有实数 x 成立，设 $f(x)=(y_1'(x))^2+(y_2'(x))^2+(y_3'(x))^2$，求常数 A，B，使得 $f(x)$是微分方程

$$y' + Ap(x)y = Br(x)$$

的解.

解 由题设有

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = 0 \tag{1}$$

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0 \tag{2}$$

$$y_3''' + p(x)y_3'' + q(x)y_3' + r(x)y_3 = 0 \tag{3}$$

由 $f(x)=(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2$ 得

$$f'(x) = 2y_1'y_1'' + 2y_2'y_2'' + 2y_3'y_3'' \tag{4}$$

由 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ 两边对 x 求导

$$2y_1y_1' + 2y_2y_2' + 2y_3y_3' = 0 \tag{5}$$

除以 2 后两边对 x 求导得

$$(y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2 + y_1y_1'' + y_2y_2'' + y_3y_3'' = 0$$

即 $$f(x) + y_1y_1'' + y_2y_2'' + y_3y_3'' = 0 \tag{6}$$

两边对 x 求导

$$f'(x) + y_1'y_1'' + y_2'y_2'' + y_3'y_3'' + y_1y_1''' + y_2y_2''' + y_3y_3''' = 0$$

将(4)代入得

$$y_1y_1''' + y_2y_2''' + y_3y_3''' = -\frac{3}{2}f'(x) \tag{7}$$

$y_1 \cdot (1)+y_2 \cdot (2)+y_3 \cdot (3)$并利用(4)～(7)及已知条件得

$$-\frac{3}{2}f'(x) - p(x)f(x) + r(x) = 0$$

$$f'(x) + \frac{2}{3}p(x)f(x) = \frac{2}{3}r(x)$$

故 $$A = \frac{2}{3},\quad B = \frac{2}{3}$$

例 20 在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数（Q 是法线与 x 轴的交点），且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，则它在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \qquad (y'\neq 0)$$

它与 x 轴的交点为 $Q(x+yy',0)$.

$$PQ=\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

由题设 $y''>0$，且

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}}$$

得
$$\begin{cases} yy''=1+(y')^2 \\ y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=0 \end{cases}$$

令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$$

$$\frac{p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=\ln y+C_1$$

由 $y|_{x=1}=1$ 及 $p|_{x=1}=y'|_{x=1}=0$ 得 $C_1=0$，故有

$$\sqrt{1+p^2}=y$$

$$p=\pm\sqrt{y^2-1} \text{ 即 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{y^2-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$$

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C_2$$

由初始条件得 $C_2=\mp 1$，故

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm (x - 1)$$

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm(x-1)}$$

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = e^{\mp(x-1)}$$

两式相加，解得

$$y = \frac{e^{x-1} + e^{-(x-1)}}{2}$$

例 21 在 13 时到 14 时的什么时间，一个时钟的分钟恰好与时针重合？

解 将圆周角 60 等分，设每份为 1 个单位，又设 t(min)时刻分针与时针分别位于 $x(t)$和 $y(t)$处，由于初始时间为 13 时，又分针与时针的速度分别为 1(单位/min)与$\frac{5}{60}$(单位/min)，故有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{12} \\ y|_{t=0} = 5 \end{cases}$$

解得 $$x=t, \quad y=\frac{1}{12}t+5$$

令 $$t = \frac{1}{12}t + 5$$

解得 $$t = \frac{60}{11}(\text{min}) \approx 5\text{min}27\text{s}$$

故分针与时针重合的时间约为 13 时 5 分 27 秒.

例 22 初始质量为 M_0 g，在空气中自由落下的雨点均匀地蒸发着，设每秒蒸发 A g，空气的阻力与雨点的速度成正比，试求雨点的运动速度与时间的关系.

解 设 t 时刻雨点速度为 $v=v(t)$，由牛顿第二定律

$$ma = f$$

由于 $$m=M_0-At, \quad a=\frac{dv}{dt}$$

$$f = (M_0 - At)g - kv \qquad (k > 0)$$

有 $$(M_0 - At)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (M_0 - At)g - kv$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{M_0 - At}v = g$$

$$v = \mathrm{e}^{-\int\frac{k}{M_0 - At}\mathrm{d}t}\left(C + \int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{M_0 - At}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= (M_0 - At)^{\frac{k}{A}}\left[C + \frac{g}{k - A}(M_0 - At)^{\frac{A-k}{A}}\right]$$

由 $v(0)=0$，得

$$C = \frac{-g}{k - A}M_0^{\frac{A-k}{A}}$$

$$v = (M_0 - At)^{\frac{k}{A}}\left[\frac{-g}{k - A}M_0^{\frac{A-k}{A}} + \frac{g}{k - A}(M_0 - At)^{\frac{A-k}{A}}\right]$$

$$= \frac{g}{k - A}(M_0 - At) - \frac{g}{k - A}M_0^{1-\frac{k}{A}}(M_0 - At)^{\frac{k}{A}}$$

例 23 （1）一架质量为 4.5 t 的歼击机以 600 km/h 的航速开始着陆，在减速伞的作用下滑跑 500 m 后速度减为 100 km/h，设减速伞的阻力与飞机的速度成正比，并忽略飞机所受的其他外力，试计算减速伞的阻力系数；

（2）若将同样的减速伞配备在质量为 9 t 的轰炸机上，现已知机场跑道长 1500m，若飞机着陆速度为 700 km/h，问跑道长度能否保障飞机安全着陆？

解 设飞机从接触跑道时开始计时，t 时刻滑跑距离为 $x(t)$，飞机着陆速度为 v_0，减速伞的阻力系数为 k.

（1）根据牛顿第二定律 $ma=f$，有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

由于 $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

故有 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k,\quad \mathrm{d}v = -\frac{k}{m}\mathrm{d}x$$

积分得 $$v = v_0 - \frac{k}{m}x$$

故 $$k = \frac{m(v_0 - v)}{x}$$

将 $m=4500$ kg，$v_0=600$ km/h，$v=100$ km/h，$x=0.5$ km 代入，得

$$k = 4.5 \times 10^6 \text{ kg/h}$$

(2) 由 $m\frac{dv}{dt}=-kv$，得

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$$

积分得 $$\ln v = \ln v_0 - \frac{k}{m}t$$

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

即 $$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$x = -v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

由 $x|_{t=0}=0$，得 $C=v_0\frac{m}{k}$，故

$$x = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

此即飞机滑跑距离.

由于 $x\leqslant\frac{mv_0}{k}$，当 $m=9000$ kg，$v_0=700$ km/h 时

$$\frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{4.5 \times 10^6} = 1.4 \text{ km} = 1400 \text{ m} < 1500 \text{ m}$$

所以飞机可以在此跑道上安全着陆.

例 24 微生物培养的增殖速率和它们现有的量及现有的营养物质的乘积成正比（比例系数为 k），营养物质减少的速率和微生物的现有量成正比（比例系数为 k_1），实验开始时，容器内有 x_0 g 微生物和 y_0 g 营养物质，试求微生物的量及营养物质的量随时

间的变化规律，并问何时微生物停止增殖.

解 设 t 时刻微生物的量为 $x=x(t)$，营养物质的量为 $y=y(t)$，则由题意

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=kxy & (1)\\ \dfrac{dy}{dt}=-k_1x & (2)\\ x(0)=x_0, y(0)=y_0\end{cases}$$

(2)两边对 t 求导

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-k_1\frac{dx}{dt}=-k_1kxy=ky\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

令 $\dfrac{dy}{dt}=p(y)$，则 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=p\dfrac{dp}{dy}$，代入(3)得

$$p\frac{dp}{dy}=kyp,\quad \frac{dp}{dy}=ky$$

解得

$$P=\frac{k}{2}y^2+C_1$$

由 $p|_{t=0}=\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=-k_1x_0$，及 $y|_{t=0}=y_0$，得

$$C_1=-k_1x_0-\frac{k}{2}y_0^2$$

故

$$\frac{dy}{dt}=p=\frac{k}{2}\left[y^2-\left(\frac{2k_1}{k}x_0+y_0^2\right)\right]$$

$$\left(\text{记 } A=\sqrt{\frac{2k_1}{k}x_0+y_0^2}\right)$$

$$=\frac{k}{2}(y^2-A^2)$$

利用分离变量法解得

$$\ln\frac{y-A}{y+A}=kAt+C_2$$

$$\frac{y-A}{y+A}=Be^{kAt} \tag{4}$$

由初始条件求得

$$B=\frac{y_0-A}{y_0+A}$$

由(4)解得

$$y=\frac{A(1+Be^{kAt})}{1-Be^{kAt}}$$

由(2)得 $$x=-\frac{1}{k_1}\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{k_1}\frac{k}{2}(y^2-A^2)$$

$$=\frac{kA^2}{2k_1}\left[1-\left(\frac{1+Be^{kAt}}{1-Be^{kAt}}\right)^2\right]$$

由 $y=0$ 得 $1+Be^{kAt}=0$，解得

$$t=\frac{1}{kA}\ln\left(-\frac{1}{B}\right)$$

此时微生物停止增殖.

例 25 放射性同位素甲原有质量 M_0 g，甲衰变成放射性同位素乙，乙又衰变成元素丙，丙不再衰变，记 t 时刻甲、乙、丙的质量分别为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，求 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$.

解 由于衰变速度与质量成正比，故在时间 $[t,t+dt]$ 内，甲减少了 $dx=-k_1xdt$，乙增加了 k_1xdt，同时又减少了 $-k_2ydt$，故

$$dy=k_1xdt-k_2ydt$$

而丙增加了 k_2ydt，即 $dz=k_2ydt$，因此有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-k_1x & (k_1>0) \quad (1)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=k_1x-k_2y & (k_2>0) \quad (2)\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=k_2y & \quad (3)\\[2mm] x(0)=M_0,y(0)=0,z(0)=0 & \quad (4)\end{cases}$$

由(1)、(4)得

$$x=M_0e^{-k_1t}$$

代入(2)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k_2y=k_1M_0\mathrm{e}^{-k_1t}$$

解得

$$y=\frac{k_1M_0}{k_2-k_1}(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t})$$

代入(3)解得

$$z=\frac{M_0}{k_2-k_1}(-k_2\mathrm{e}^{-k_1t}+k_1\mathrm{e}^{-k_2t})+M_0$$

例 26 设高为 12 m，水平截面为圆形的桥墩的载荷为 $p=90$ t(本身质量另加)，材料的密度为2.5 t/m³，允许压力为 $k=2940$ kN/m²，求桥墩上、下底面积和通过桥墩中心轴的垂直平面与桥墩相截所得截线的方程.

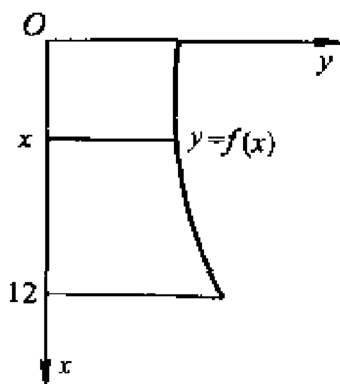


图 61

解 如图 61 建立坐标系，设截线方程为 $y=f(x)$，x 处水平截面面积为 $A(x)$. 由题意，$A(0)$载荷为 90 t，又由于 $k=2940$ kN/m²，故有

$$\frac{90\times9.8}{A(0)}=\frac{2940}{1},\quad A(0)=0.3$$

故

$$\pi f^2(0)=A(0)=0.3$$

$$f(0)=\sqrt{\frac{0.3}{\pi}}$$

由于 x 位置以上部分桥墩体积为

$$V(x)=\int_0^x A(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

由题意，$A(x)$的载荷为 $90+2.5V(x)$，故有

$$\frac{(90+2.5V(x))\times9.8}{A(x)}=\frac{2940}{1}$$

得 $$90+2.5\int_0^x \pi f^2(x)\mathrm{d}x = 300\pi f^2(x)$$

两边对 x 求导

$$2.5\pi f^2(x) = 600\pi f(x)f'(x)$$

由于 $f(x)\neq 0$，有

$$240f'(x) = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \frac{1}{240}\mathrm{d}x$$

$$f(x) = C\mathrm{e}^{x/240}$$

由 $f(0)=\sqrt{\frac{0.3}{\pi}}$，得 $C=\sqrt{\frac{0.3}{\pi}}$，故

$$f(x) = \sqrt{\frac{0.3}{\pi}}\mathrm{e}^{x/240}$$

$$A(12) = \pi f^2(12) = 0.3\mathrm{e}^{1/10} \approx 0.33$$

因此上、下底面积分别为 $0.3\mathrm{m}^2$，$0.33\mathrm{m}^2$，截线方程为

$$y=\sqrt{\frac{0.3}{\pi}}\mathrm{e}^{x/240} \quad (0\leqslant x\leqslant 12)$$

例 27 如图 62，A、B、C、D 四个动点开始分别位于一个正方形的四个顶点，然后 A 点向着 B 点，B 点向着 C 点，C 点向着 D 点，D 点向着 A 点同时以相同的速率运动，求点 A 的运动轨迹.

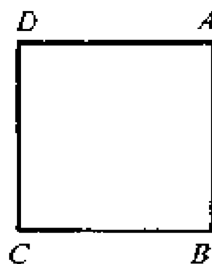


图 62

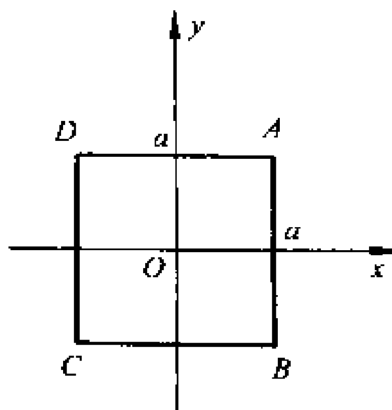


图 63

解 如图 63 建立坐标系，其中原点是正方形中心. 设 $M(x, y)$ 是 A 点的运动轨迹上任一点，此时 B 点的位置应为 $N(y, -x)$，由题意，点 A 的运动轨迹在 M 处的切线经过点 B，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(-x)}{x-y}=\frac{x+y}{x-y},\quad y|_{x=a}=a$$

令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，方程化成

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C$$

即
$$\arctan\frac{y}{x}=C+\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

由 $y|_{x=a}=a$，得 $C=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2a^2)$，故 A 的运动轨迹为

$$\arctan\frac{y}{x}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{2a^2}$$

例 28 一根长为 l 的细绳，一端固定，另一端悬挂一质量为 m 的质点(如图 64)，设忽略空气的阻力自由摆动，这种系统称为单摆，试建立单摆运动的微分方程并求解(忽略绳索的质量).

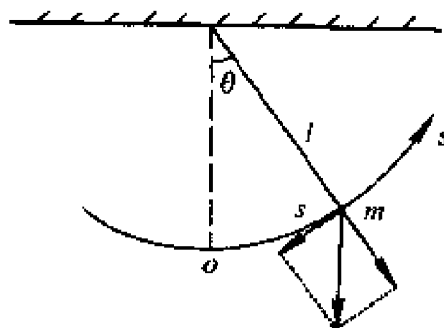


图 64

解 设 t 时刻质点摆角为 θ，位移为 s，则

$$s=l\theta$$

质点重力的切线分量为 $-mg\sin\theta$，根据牛顿第二定律

$$F=ma$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad F = -mg\sin\theta$$

$$-mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

记 $\omega=\sqrt{g/l}$，有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\sin\theta = 0$$

当 θ 较小时，$\sin\theta\approx\theta$，方程变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

解得
$$\theta = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$$

注 若记 $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$，$\cos\varphi=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$，则 $\theta=A\sin(\omega t+\varphi)$，其中 A 称为振幅，ω 称为角频率，φ 称为初相角，摆动的周期为 $T=2\pi/\omega$.

例 29 设由 x 轴，曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，$x=0$，$x=a(a>0)$所围成平面图形形心的横坐标 $\bar{x}$ 是由 $\bar{x}=g(a)$所给定，证明

$$f(x) = \frac{Cg'(x)}{[x-g(x)]^2}e^{\int\frac{dx}{x-g(x)}}$$

其中 C 为常数.

证
$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\int_0^{f(x)}dy}{\int_0^a dx\int_0^{f(x)}dy}$$

$$= \frac{\int_0^a xf(x)dx}{\int_0^a f(x)dx} = g(a)$$

因此 $$g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} \qquad (x>0)$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，得

$$g(x)F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

两边对 x 求导

$$g(x)F'(x)+g'(x)F(x)=xf(x)=xF'(x)$$

$$F'(x)=\frac{g'(x)}{x-g(x)}F(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=\frac{g'(x)}{x-g(x)}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\ln F(x)&=\int\frac{g'(x)}{x-g(x)}\mathrm{d}x+C_1\\&=\int\frac{-1+g'(x)+1}{x-g(x)}\mathrm{d}x+C_1\\&=-\ln|x-g(x)|+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}+C_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x)&=C\mathrm{e}^{-\ln|x-g(x)|+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}}\\&=\frac{C}{x-g(x)}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}} \qquad (\text{由题意 } x>g(x))\end{aligned}$$

因此有

$$f(x)=F'(x)=\frac{g'(x)}{x-g(x)}F(x)=\frac{Cg'(x)}{(x-g(x))^2}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}}$$

例 30 将一质量均匀分布的柔软绳索两端固定，仅受自身重力作用达平衡状态，求此绳索的形状.

解 如图 65 建立坐标系，使绳索最低点在 y 轴上 A 点处. 设绳索曲线为 $y=y(x)$，$M(x,y)$是曲线上任一点，绳索的质量线密度为 μ，s 是$\overset{\frown}{AM}$的弧长，$\overset{\frown}{AM}$的受力情况为：A 点沿水平方向（切

线方向）的张力 H（常力），M 点沿切线方向的张力 T（随 M 而改变），重力 μsg. 由于所有作用于 $\overset{\frown}{AM}$ 的外力呈平衡状态，按静力平衡条件有

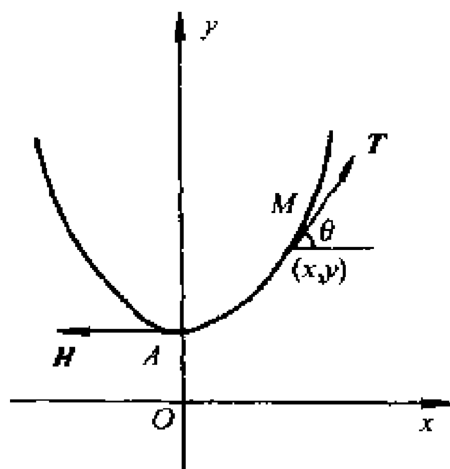


图 65

水平方向 $\quad T\cos\theta - H = 0$

垂直方向 $\quad T\sin\theta - \mu sg = 0$

两式移项并相除得

$$\tan\theta = \frac{\mu sg}{H}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu g}{H}\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

两边对 x 求导

$$y'' = \frac{\mu g}{H}\sqrt{1 + (y')^2} \qquad \left(记\frac{\mu g}{H} = \frac{1}{a}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$$

令 $y' = p(x)$，得

$$p' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

即
$$\operatorname{arsh}p = \frac{x}{a} + C_1$$

$$y' = p = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + C_1\right)$$

$$y = a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2$$

由于 A 是最低点，故 $y'|_{x=0} = 0$，因此 $C_1 = 0$. 为使曲线方程简单，

可将点 A 取在 $y=a$ 处，此时 $C_2=0$. 故绳索的形状为

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a} \qquad \text{(称为悬链线)}$$

例 31 我方雷达发现敌机后，立即向目标发射导弹，设敌机以匀速 v_1 作直线飞行，导弹的飞行方向始终指向敌机，其速度为常数 $v_2(v_2>v_1)$，求导弹飞行路线及击中目标的时间.

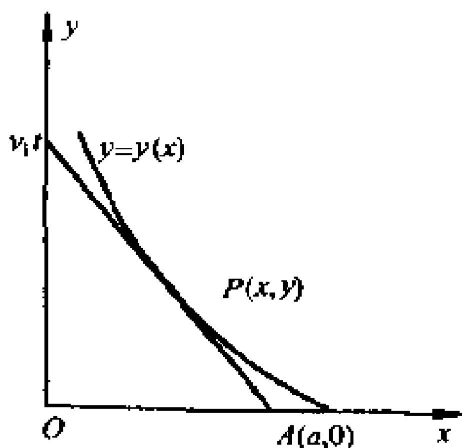


图 66

解 如图 66 建立坐标系，设初始时刻敌机在原点，导弹在点 $A(a,0)$处，敌机飞行方向为 y 轴正向，导弹飞行路线为 $y=y(x)$. 在时刻 t，导弹在点 $P(x,y)$处，其切线方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$. 由题意，有

$$y - xy' = v_1t$$

又
$$\overset{\frown}{AP} = -\int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = v_2t$$

以上两式消去 t 得

$$-\int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \frac{v_2}{v_1}(y - xy')$$

两边对 x 求导，并记

$$k = \frac{v_1}{v_2} \qquad (k<1)$$

$$-\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{k}(-xy'')$$

故有
$$\begin{cases} xy'' = k\sqrt{1+(y')^2} \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 0 \end{cases}$$

令 $y'=p(x)$，得

$$xp' = k\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{k}{x}dx$$

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \ln x^k + C_1$$

由初始条件得 $C_1 = -\ln a^k$，故

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \ln\left(\frac{x}{a}\right)^k$$

$$p+\sqrt{1+p^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^k$$

$$p-\sqrt{1+p^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^k$$

解得 $$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^k - \left(\frac{a}{x}\right)^k\right)$$

积分并利用初始条件得

$$y = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} - \frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right) + \frac{ak}{1-k^2}$$

此即导弹飞行路线.

当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{ak}{1-k^2}=\dfrac{av_1v_2}{v_2^2-v_1^2}$

$$t = \frac{y}{v_1} = \frac{av_2}{v_2^2-v_1^2}$$

此即导弹击中目标的时间.

例 32 一小船渡河，设小船以匀速 v_1 航行，且航向始终对着出发时对岸的点，河宽为 a，河水流速为 v_2，求小船航行的路线.

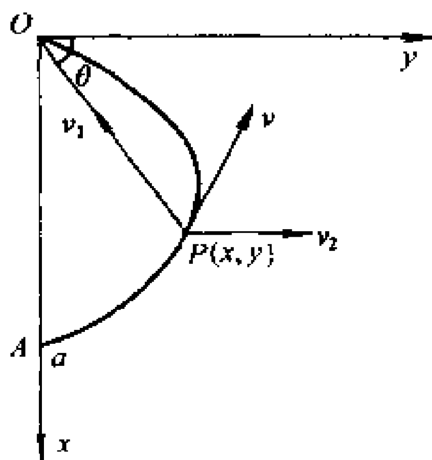


图 67

解 如图 67 建立坐标系，设 $A(a,0)$为小船出发点，原点为出发时对岸的点，小船航行路线为 $y=y(x)$，设 $P(x,y)$是曲线上任一点，

小船实际航行速度为$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$方向如图，又

$$\boldsymbol{v}=\{v_x,v_y\}=\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}$$

则有
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_2-v_1\cos\theta\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v_1\sin\theta\end{cases}\qquad (\theta \text{ 为 } OP \text{ 与 } y \text{ 轴正向夹角})$$

两式相除得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot\theta-\frac{v_2}{v_1}\frac{1}{\sin\theta}$$

记$\dfrac{v_2}{v_1}=b$，又$\cot\theta=\dfrac{y}{x}$，$\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-b\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\\ y|_{x=a}=0\end{cases}$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-b\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-b\ln|x|+C$$

由$u|_{x=a}=\dfrac{y}{x}\Big|_{x=a}=0$，得$C=b\ln a$，故

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln\left(\frac{a}{x}\right)^b$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^b$$

$$u-\sqrt{1+u^2}=-\left(\frac{x}{a}\right)^b$$

解得
$$u=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right]$$

即
$$y=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b-\left(\frac{x}{a}\right)^b\right]$$

此即小船航行的路线.

第七章　级　　数

一、内容要点

本章内容包括级数的敛散性的判定，求级数的和，将函数展成泰勒级数或傅里叶级数，及级数的一些应用.

判定级数敛散性的一般方法：

1. 利用敛散性定义.

2. 利用收敛及绝对收敛级数的性质.

3. 利用正项级数的收敛准则，比较判别法，比值判别法，根值判别法及积分判别法.

4. 利用绝对收敛与收敛的关系.

5. 利用莱布尼兹准则.

6. 利用幂级数与傅里叶级数的收敛域.

求级数和的一般方法：

1. 利用 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

2. 利用级数的性质.

3. 利用等比级数求和公式.

4. 利用逐项求导或逐项积分.

5. 利用常用的麦克劳林级数.

6. 利用傅里叶级数的和函数.

7. 利用方程或常微分方程.

8. 利用定积分定义.

二、例题选讲

例 1　已知数列 $\{na_n\}$ 收敛，求证 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛的充要

条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 设 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，则

$$\begin{aligned} S_n &= 2(a_2 - a_1) + 3(a_3 - a_2) + \cdots + n(a_n - a_{n-1}) \\ &= -2a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_{n-1} + na_n \\ &= -\sigma_n - a_1 + na_n \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ 存在，因此 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 2 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的正数数列，试证当 $\{u_n\}$ 有界时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛.

证 由于 $\{u_n\}$ 单调增加，

$$0 \leqslant 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{u_{n+1} - u_n}{u_1}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 的部分和为

$$S_n = u_{n+1} - u_1$$

当 $\{u_n\}$ 有界时，$\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解
$$\begin{aligned} 0 < u_n &= \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/n} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^{1/n} = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

例 4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}\quad (a>0)$ 的敛散性.

解 令 $a=\mathrm{e}^p$，则

$$\frac{1}{a^{\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{p\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n^p}}=\frac{1}{n^p}$$

因此当 $a>\mathrm{e}$ 时，有 $p>1$，级数收敛；当 $0<a\leqslant\mathrm{e}$ 时，有 $p\leqslant 1$，级数发散.

例 5 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)^{\ln(1+n)}}$ 的敛散性.

解 当 n 充分大时

$$0<u_n=\frac{1}{\ln(1+n)^{\ln(1+n)}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(\ln(1+n)^{\ln(1+n)})}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(1+n)\ln\ln(1+n)}}<\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n\ln\ln(1+n)}}$$

$$=\frac{1}{n^{\ln\ln(1+n)}}<\frac{1}{n^2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)^{\ln(1+n)}}$ 收敛.

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性.

解 当 $-1<x<+\infty$ 且 $x\neq 0$ 时，有

$$\ln(1+x)<x$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$>-\left(-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$$

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\Big/\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{n(n+1)}\Big/\frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2n^{3/2}}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{3/2}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 收敛.

例 7 判别下列级数的敛散性.

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}+\cdots$

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$

解 (1) $u_n=\frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}>0$

由 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$$

故 $u_n<\frac{1}{3^{\ln(1+n)}}<\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln 3^{\ln n}}}=\frac{1}{e^{\ln n\ln 3}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}$

$\ln3>1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 当 $n\geqslant3$，$n^n>n!$，故

$$n\ln n=\ln n^n>\ln(n!)$$

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln n} > 0$$

因为 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \infty$，故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散，因此 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 发散.

(3) 当 $a \leqslant 2$，由于 $\ln 3 > 1$，…，$\ln n > 1 (n > 3)$，故

$$\frac{\ln(n!)}{n^a} = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n^a} \geqslant \frac{n-2}{n^a}$$

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^a}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 发散.

当 $a > 2$，取 β 使 $a > \beta > 2$，则由于当 n 充分大时

$$\frac{\ln(n!)}{n^a} < \frac{\ln n^n}{n^a} = \frac{n\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-1}}$$

$$= \frac{1}{n^{\beta-1}} \frac{\ln n}{n^{a-\beta}} < \frac{1}{n^{\beta-1}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-1}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 收敛.

例 8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(3+\sqrt{5})^n]$ 的敛散性.

解 记 $M_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{n-k} \sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 3^{n-k} \sqrt{5}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1 + (-1)^k) C_n^k 3^{n-k} \sqrt{5}^k$$

则 M_n 是偶数. 因此

$$\left|\sin[\pi(3+\sqrt{5})^n]\right| = \left|\sin[\pi(M_n - (3-\sqrt{5})^n)]\right|$$

$$= \left|\sin[\pi(3-\sqrt{5})^n]\right| \leqslant \pi(3-\sqrt{5})^n$$

由于 $0 < 3-\sqrt{5} < 1$，$\sum_{n=0}^{\infty} (3-\sqrt{5})^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(3+\sqrt{5})^n]$ 绝对收敛.

例 9 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x$$

记 $$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x,\quad v_n=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x$$

显然 u_n 单调减少，故

$$u_n^2>u_nu_{n+1}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{n!!}{(n+1)!!}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$$

$$u_n>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 而

$$0<v_n<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\frac{\pi}{4}<\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\mathrm{d}x$ 发散.

例 10 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$ 的敛散性.

解 $u_n=\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=(-1)^n\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi$

当 α 为整数时，$u_n=(-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$，当 $\beta\geqslant 0$，由于 $\sin\frac{\beta}{n}\pi$ 单调减少，且

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\beta}{n}\pi=0$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 当 $\beta<0$，

$$u_n=(-1)^{n+\alpha+1}\sin\frac{-\beta}{n}\pi$$

同样有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

当 α 不为整数时，

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi\right| = |\sin\alpha\pi| \neq 0$$

此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 11 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\sqrt{n^2+2}\pi$ 是否收敛，若收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解
$$\tan\sqrt{n^2+2}\pi = \tan(\sqrt{n^2+2}-n)\pi$$
$$= \tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n} > 0 \quad (当\ n \geqslant 2)$$

$\tan\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}=0$，故级数收敛.

由于

$$\tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n} > \frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n} > \frac{1}{2n}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\tan\sqrt{n^2+2}\pi\right|$ 发散，因此级数条件收敛.

例 12 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x_n^2}$ 的敛散性，其中 $\{x_n\}$ 是方程 $x=\tan x$ 的正根按递增顺序编号而得的序列.

解 令 $f(x)=x-\tan x$， $x\in\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leqslant 0$$

等号仅在 $x=n\pi$ 时成立，故 $f(x)$ 单调减少，又

$$\lim_{x\to\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$$

故 $f(x)$ 在 $\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 有惟一的根，且

$$x_n \in \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_n > n\pi - \frac{\pi}{2} > n - 2$$

故
$$x_n^2 > (n-2)^2,\ \frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{(n-2)^2}$$

由于 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 收敛.

例 13 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛，并说明理由.

解 由于 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n \geqslant 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，则 $a>0$. 因为若 $a=0$，则根据莱布尼兹准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与已知矛盾. 因此有

$$0 < \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

例 14 判别级数

$$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$$

的敛散性.

解 1 令 $v_1=\sqrt{2}$，$v_2=\sqrt{2+v_1}$，…，$v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$，…则原级数的一般项为

$$u_n = \sqrt{2 - v_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2 - v_n}}{\sqrt{2 - v_{n-1}}} = \frac{\sqrt{2 - v_n}\sqrt{2 + v_n}}{\sqrt{2 - v_{n-1}}\sqrt{2 + v_n}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - v_n^2}}{\sqrt{2 - v_{n-1}}v_{n+1}} = \frac{\sqrt{4 - (2 + v_{n-1})}}{\sqrt{2 - v_{n-1}}v_{n+1}} = \frac{1}{v_{n+1}}$$

显然 v_n 单调增加，又 $v_1 < \sqrt{2} + 1$，设 $v_n < \sqrt{2} + 1$，有

$$v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} < \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1}$$

$$< \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$$

因此 $\{v_n\}$ 有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ 存在，设

$$\lim_{n\to\infty} v_n = A$$

由 $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$ 两边取极限得

$$A = \sqrt{2 + A}$$

解得 $A = 2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

故级数收敛.

解 2 设 $v_1 = \sqrt{2}$，$v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 原级数的一般项为 $u_n = \sqrt{2 - v_{n-1}}$ $(n = 2, 3, \cdots)$，则有

$$v_1 = \sqrt{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{2^2}$$

$$v_2 = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$u_1 = v_1 = 2\sin\frac{\pi}{2^2}$$

$$u_2 = \sqrt{2 - v_1} = \sqrt{2 - \cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin(\pi/2^{n+2})}{2\sin(\pi/2^{n+1})} = \frac{1}{2} < 1$$

故级数收敛.

例 15 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ 是发散的.

证 由于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加并以 e 为极限，故有

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < e, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < e, \cdots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

即
$$\frac{2}{1} < e, \left(\frac{3}{2}\right)^2 < e, \cdots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e$$

以上各式相乘得

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n$$

$$\frac{e^n n!}{n^n} > \frac{(n+1)^n}{n^n} > 1$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ 的一般项不以零为极限，故该级数发散.

例 16 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$，试证，当$q>1$时级数收敛，当 $q<1$ 时级数发散.

证 当 $q>1$，取 α 使 $q>\alpha>1$，则由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$$

当 n 充分大时，有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>\alpha,\quad \ln\frac{1}{a_n}>\alpha\ln n=\ln n^{\alpha}$$

$$a_n<\frac{1}{n^{\alpha}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

当 $q<1$，取 α 使 $q<\alpha<1$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$$

当 n 充分大时有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<\alpha,\quad \ln\frac{1}{a_n}<\alpha\ln n=\ln n^{\alpha}$$

$$a_n>\frac{1}{n^{\alpha}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例 17 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，试证

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

收敛.

证 令 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，则由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，有 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 又由于 $\{a_n\}$ 单调减少，故 $b_n\geqslant a_n$，又

$$nb_n-nb_{n+1}=nb_n-(n+1)b_{n+1}+b_{n+1}$$

$$= (a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) + b_{n+1}$$

$$= b_{n+1} - a_{n+1}$$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{n} \geqslant 0$$

$\{b_n\}$单调减少，由莱布尼兹准则，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

收敛.

例 18 设级数的部分和为 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$，判断该级数的敛散性.

解 设级数的一般项为 u_n，则

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n-1)\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \Big/ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 19 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n(n+1)^a(n+2)^b$，问 a, b 取何值时该级数收敛.

解 $u_n = \ln n(n+1)^a(n+2)^b$

$$= \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

$$= (1+a+b)\ln n + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$= (1+a+b)\ln n + a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) +$$

$$b\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (1+a+b)\ln n + (a+2b)\frac{1}{n} - \frac{1}{2}(a+4b)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

当$1+a+b=0$，$a+2b=0$时级数收敛，解得

$$a=-2,\quad b=1$$

例 20 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=0$.

解 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 S_n，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在.

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

$$= S_1 + 2(S_2 - S_1) + 3(S_3 - S_2) + \cdots + n(S_n - S_{n-1})$$

$$= -S_1 - S_2 - \cdots - S_{n-1} + nS_n$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k = -\frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n) + S_n + \frac{1}{n}S_n$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k = \lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{-n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}S_n$$

$$= -S + S = 0$$

例 21 设 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，定义 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，其中 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_ka_{n+1-k}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散.

证
$$c_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\frac{(-1)^{n+1-k+1}}{\sqrt{n+1-k}}$$

$$= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n+1-k}}$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n+1-k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \geqslant 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散．

例 22 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，a_n 单调减少，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 的部分和分别为 S_n 与 σ_n，则由于 a_n 单调减少且非负，有

$$S_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})$$
$$< a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n} = \sigma_n$$

又 $S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})$

$$> \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n}) = \frac{1}{2}\sigma_n$$

因此　S_{2^n} 有界 $\Leftrightarrow \sigma_n$ 有界

而　S_n 有界 $\Leftrightarrow S_{2^n}$ 有界

故　S_n 有界 $\Leftrightarrow \sigma_n$ 有界

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛.

例 23 设数列 $S_1=1$，S_2，S_3，…由公式 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}$ $(u_n>0)$ 确定，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 收敛.

证 由 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}$ 得 $S_n>0$，且

$$S_{n+1}(S_{n+1}-S_n)=\frac{u_n}{4}$$

由于 $u_n>0$，$S_n>0$ 得 $S_{n+1}-S_n\geqslant0$，即$\{S_n\}$单调增加，因为 $S_1=1$，所以 $S_n\geqslant1$，故

$$0<S_{n+1}-S_n\leqslant\frac{u_n}{4}=S_{n+1}(S_{n+1}-S_n)$$
$$<(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-S_n)=S_{n+1}^2-S_n^2$$

因此若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}-S_n)$ 也收敛，故其部分和

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-S_k)=S_{n+1}-S_1$$

有极限，因此$\{S_n\}$收敛.

若$\{S_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^2$ 存在，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}^2-S_n^2)$ 的部分和为

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}^2-S_k^2)=S_{n+1}^2-S_1^2$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 存在，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1}^2-S_n^2)$ 收敛，由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{4}$ 收敛．因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

例 24 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，已知其一般项 u_n 与部分和有如下关系 $2S_n^2=2u_nS_n-u_n(n\geqslant2)$，且 $u_1=2$.

解 由 $2S_n^2=2u_nS_n-u_n$，有

$$2S_n(S_n-u_n)=-u_n$$

即
$$2S_nS_{n-1}=-(S_n-S_{n-1})$$

$$S_n=\frac{S_{n-1}}{1+2S_{n-1}}$$

由 $S_1=u_1=2$，有 $S_2=\frac{2}{5}$，$S_3=\frac{2}{9}$，若设

$$S_{n-1}=\frac{2}{1+4(n-2)}$$

则有
$$S_n=\frac{\frac{2}{1+4(n-2)}}{1+\frac{2\times 2}{1+4(n-2)}}=\frac{2}{1+4(n-1)}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+4(n-1)}=0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

例 25 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$ 的敛散性与参数 p,x 的关系.

解 当 n 充分大时，$1-\frac{x\ln n}{n}>0$，故级数为正项级数.

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n\\&=\frac{1}{n^p}\left[\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^{-\frac{n}{x\ln n}}\right]^{-x\ln n}\\&=\frac{1}{n^p}\frac{1}{\left[\left(\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^{-\frac{n}{x\ln n}}\right)^{\ln n}\right]^x}\end{aligned}$$

由于
$$\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^{-\frac{n}{x\ln n}}\to e$$

而 $(e^{\ln n})^x=n^x$，故取 $v_n=\frac{1}{n^{p+x}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^{-\frac{n}{x}}}\right]^x\xlongequal{\text{def}}\lim_{n\to\infty}(y_n)^x$$

利用麦克劳林公式有

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n + \frac{n}{x}\ln\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln n + \frac{n}{x}\left(\frac{-x\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{-x\ln n}{n}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{x\ln n}{n}\right)^2\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{x\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{x^2\ln^2 n}{n}\right)\right]$$

$$= 0$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 1$. 又当 $p+x>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，当 $p+x\leqslant 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.故当 $p+x>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，当$p+x\leqslant 1$时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 26 研究积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}$的敛散性.

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^a\sin^2 x} \qquad (\text{令 } t = x - n\pi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^a\sin^2 t} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u_n \leqslant \int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi)^a\sin^2 t}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n\pi)^a\sin^2 t} \qquad (\text{记 } b^2 = (n\pi)^a)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+b^2\sin^2 t} \qquad (\text{令 } y = \tan t)$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+(b^2+1)y^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2+1}}\arctan\left(\sqrt{b^2+1}\,y\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^\alpha + 1}} \xlongequal{\text{def}} v_n$$

同样 $$u_n \geqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi + \pi)^\alpha \sin^2 t}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)^\alpha \pi^\alpha + 1}} \xlongequal{\text{def}} w_n$$

由于 $$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{1/n^{\alpha/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{1/n^{\alpha/2}} = \pi^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

故 $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1/n^{\alpha/2}} = \pi^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

故当 $\alpha>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $\alpha\leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 因此当 $\alpha>2$ 时，积分收敛；当 $\alpha\leqslant 2$ 时，积分发散.

例 27 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$ 的和.

解 令

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2} + \frac{E}{n+2} + \frac{F}{(n+2)^2}$$

可得 $A=-\frac{3}{4}$，$B=\frac{1}{4}$，$C=0$，$D=1$，$E=\frac{3}{4}$，$F=\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4}\right) -$$

$$\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$$

例 28 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}-1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

例 29 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$ 的和.

解

$$S(x)=x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}+\cdots$$

$$S'(x)=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{1\cdot 3\cdots(2n-3)}+\cdots$$

$$=1+xS(x)$$

$$S'(x)-xS(x)=1,\quad S(0)=0$$

$$S(x)=e^{-\int_0^x -x\,dx}\left(C+\int_0^x 1\cdot e^{\int_0^x -x\,dx}dx\right)$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(C+\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

由 $S(0)=0$ 得 $C=0$，故级数的和为

$$S(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

例 30 设 $a_n-a_{n-1}=d$（定数），$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$ 收敛，并求其和，其中 m 是一确定的正整数.

证 由 $a_n-a_{n-1}=d$，得

$$a_{n+m}=a_n+md,\quad a_{n+m}-a_n=md$$

$$u_n\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\frac{a_{n+m}-a_n}{(a_{n+m}-a_n)a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$$

$$=\frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}\right)$$

级数的部分和为

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}S_n$$

$$=\frac{1}{md}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}\right)$$

$$=\frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_m}-\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{k+m}}\right)$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，故

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{1}{mda_1a_2\cdots a_m}$$

因此级数收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\frac{1}{mda_1a_2\cdots a_m}$$

例 31 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和.

解 设

$$u_n=\arctan\frac{1}{2n^2}$$

$$\tan(u_1+u_2)=\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

$$\tan(u_1+u_2+u_3) = \tan((u_1+u_2)+u_3)$$

$$= \tan\left(\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \frac{3}{4}$$

设 $\tan S_n=\frac{n}{n+1}$，则有

$$\tan S_{n+1} = \tan(S_n+u_{n+1})$$

$$= \tan\left(\arctan\frac{n}{n+1}+\arctan\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} = \frac{n+1}{n+2}$$

故 $$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$$

例 32 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ 的和.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}(e^{inx})}{n!}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}\right)$$

$$= \mathrm{Im}(e^{e^{ix}}) = \mathrm{Im}(e^{\cos x+i\sin x})$$

$$= e^{\cos x}\mathrm{Im}(e^{i\sin x})$$

$$= e^{\cos x}\sin(\sin x)$$

例 33 证明当 $|x|<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\alpha$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha$ 收敛并求其和，其中 α 为任意实数.

证 这两个级数分别是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n\cos n\alpha + \mathrm{i}x^n\sin n\alpha)$$

的实部与虚部. 当 $|x|<1$ 时，对任意实数 α，$|xe^{\mathrm{i}\alpha}|<1$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n\cos n\alpha + \mathrm{i}x^n\sin n\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{\mathrm{i}n\alpha}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(xe^{\mathrm{i}\alpha})^n = \frac{xe^{\mathrm{i}\alpha}}{1 - xe^{\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \frac{x\cos\alpha + \mathrm{i}x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha - \mathrm{i}x\sin\alpha}$$

$$= \frac{(x\cos\alpha + \mathrm{i}x\sin\alpha)(1 - x\cos\alpha + \mathrm{i}x\sin\alpha)}{(1 - x\cos\alpha - \mathrm{i}x\sin\alpha)(1 - x\cos\alpha + \mathrm{i}x\sin\alpha)}$$

$$= \frac{x\cos\alpha - x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha} + \mathrm{i}\,\frac{x\sin\alpha}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n\sin n\alpha = \frac{x\sin\alpha}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n\cos n\alpha = \frac{x\cos\alpha - x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\alpha}$$

这也说明两级数都收敛.

例 34 设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$，$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛，并求其和.

解 由 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ 及 $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，有

$$1 = (1 - x - x^2)f(x) = (1 - x - x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) x^{n+2}$$

比较等式两边同次幂系数，有

$$a_0 = 1, a_1 - a_0 = 0, a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

即 $a_0 = 1$，$a_1 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

故 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{a_n a_{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right)$

其部分发和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2}} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right)$$

$$= \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+2}}$$

由递推公式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 及 $a_0 = a_1 = 1$，

$$a_n \geqslant n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} = 2$$

故 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛，且其和为 2.

例 35 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛，并求其和.

解 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，$u_n = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right)$$

$$= \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{4} - \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$$= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{3} + \frac{a_3 - a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{4} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{a_n}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

故级数收敛，且其和为1.

例36 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n，试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域.

解 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 S_n 有界，即$\exists\ M>0$，使对$\forall\ n$，都有 $S_n \leqslant M$，于是

$$0 \leqslant a_n e^{-S_n x} \leqslant a_n e^{S_n |x|} \leqslant a_n e^{M|x|}$$

对$\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$，$e^{M|x|}$是与 n 无关的数，又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，根据比较判别法得知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 当 $x \leqslant 0$ 时，由于 $a_n e^{-S_n x} \geqslant a_n$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 发散；当 $x > 0$ 时，由 S_n 单调增加，有

$$0 \leqslant a_n e^{-S_n x} = e^{-S_n x}(S_n - S_{n-1}) \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} e^{-tx} dt$$

又
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 收敛.

因此，当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$；当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域为 $(0, +\infty)$.

例 37 对 p 讨论幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln n}$ 的收敛域.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^p \ln(n+1)} \Big/ \frac{1}{n^p \ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \ln(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = 1$$

故 $R=1$.

当 $p>1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^p \ln n}$ 收敛，此时收敛域为 $[-1,1]$.

当 $p=1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散(利用积分判别法)，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 收敛(利用莱布尼兹准则)，此时收敛域为 $[-1,1)$.

当 $0\leqslant p<1$，在 $x=-1$，级数为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln n}$ 收敛，在 $x=1$，级数为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$. 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p\ln n}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{\ln n}=+\infty$$

及 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，可知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 发散，故此时收敛域为 $[-1,1)$.

当 $p<0$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-p}}{\ln n}=+\infty$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n}{n^p\ln n}$ 发散，此时收敛域为$(-1,1)$.

例 38 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛域及和函数.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)=1$$

$R=1$. 在 $x=\pm 1$ 处，级数的一般项不趋于零，故级数发散，因此收敛域为$(-1,1)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1}x^{n-1}+\frac{x^2}{2}x^{n-2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\cdot 1\right)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-x}\int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

例 39 设 $f_0(x)=\mathrm{e}^x$，$f_{n+1}(x)=xf_n'(x)(n=0,1,2,\cdots)$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$.

证

$$f_0(x)=\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$f_1(x)=xf_0'(x)=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^k}{k!}$$

设 $f_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{n-1}x^k}{k!}$，则有

$$f_n(x)=xf_{n-1}'(x)=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n x^{k-1}}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!}$$

因此

$$f_n(1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^k}{k!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$$

例 40 设 $u_0=0$，$u_1=1$，$u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 a，b 为实常数，又设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$.

(1) 试导出 $f(x)$满足的微分方程；

(2) 证明 $f(x)=-\mathrm{e}^{ax}f(-x)$.

解 (1) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+2}}{n!}x^n$$

由 $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$得

$$f''(x)-af'(x)-bf(x)=0 \qquad (*)$$

$$f(0)=u_0=0,\quad f'(0)=u_1=1 \qquad (**)$$

(2) 令 $g(x)=-e^{ax}f(-x)$

$$g'(x)=-ae^{ax}f(-x)+e^{ax}f'(-x)$$

$$g''(x)=-a^2e^{ax}f(-x)+2ae^{ax}f'(-x)-e^{ax}f''(-x)$$

故 $\quad g''(x)-ag'(x)-bg(x)$

$$=-e^{ax}(f''(-x)-af'(-x)-bf(-x))=0$$

即 $g(x)$满足微分方程$(*)$，又

$$g(0)=-f(0)=0$$

$$g'(0)=-af(0)+f'(0)=1$$

故 $g(x)$也满足初始条件$(**)$，因此 $g(x)=f(x)$，即

$$f(x)=-e^{ax}f(-x)$$

例 41 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)}x^n$ 的和函数($|x|<1$).

解 令和函数为 $S(x)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)}nx^{n-1}$$

$$(1-x)S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)}\cdot(nx^{n-1}-nx^n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{d(2d)\cdots((n+1)d)}(n+1)x^n-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)} n x^n$$

$$= \frac{a}{d} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)} \cdot$$

$$\left[\frac{a+nd}{(n+1)d}(n+1) - n\right] x^n$$

$$= \frac{a}{d} + \frac{a}{d}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)} x^n$$

$$= \frac{a}{d}(1 + S(x))$$

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{1+S(x)} = \frac{a}{d}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$

$$\ln|1+S(x)| = -\frac{a}{d}\ln|1-x| + C_1$$

$$1 + S(x) = C(1-x)^{-a/d}$$

由于 $S(0)=0$，故 $C=1$，因此

$$S(x) = (1-x)^{-a/d} - 1$$

例 42 已知某级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n}$$

其中 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}(n=3,4,\cdots)$.

(1) 证明此级数收敛；

(2) 求此级数的和.

解 (1) 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在. 由题设显然 $a_n \geqslant n(n\geqslant 5)$.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \frac{|a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1}|}{a_{n+1}a_n}$$

$$= \frac{|a_n^2 - (a_n + a_{n-1})a_{n-1}|}{a_{n+1}a_n} = \frac{|a_n^2 - a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2|}{a_{n+1}a_n}$$

$$= \frac{|a_n(a_n - a_{n-1}) - a_{n-1}^2|}{a_{n+1}a_n} = \frac{|a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2|}{a_{n+1}a_n}$$

$$= \frac{|a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2}|}{a_{n+1}a_n} = \cdots = \frac{|a_2^2 - a_3 a_1|}{a_{n+1}a_n}$$

$$= \frac{|1 - 2 \times 1|}{a_{n+1}a_n} \leqslant \frac{1}{a_n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n \geqslant 5)$$

故级数 $\frac{a_1}{a_2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ 收敛，因此其部分和

$$\sigma_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

有极限．设 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = A$，由

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

令 $n\to\infty$ 得 $\frac{1}{A} = 1 + A$，解得 $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

记原级数的一般项为 u_n，则由于 $u_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\Big/\frac{a_n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{2a_n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}-1} < 1$$

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（2）由 $u_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}$

得
$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} u_{k-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n} u_{k-2}$$

即
$$S_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}\left(S_{n-1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}S_{n-2}$$

令 $n\to\infty$ 得
$$S - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}S$$

解得 $S=2$，即级数的和为 2.

例 43 证明当 $p\geqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$.

证 $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}=n^{1-\frac{1}{p}}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$=n^{(p-1)/p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=n^{(p-1)/p}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^p-\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)^p\right)$$

根据拉格朗日中值公式

$$b^p-a^p=p\xi^{p-1}(b-a)\qquad(\xi\text{ 在 }a\text{ 与 }b\text{ 之间})$$

$$u_n=n^{(p-1)/p}p\xi^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

$$\left(\xi\in\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}},\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)\right)$$

$$=n^{(p-1)/p}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+\theta}}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)(0<\theta<1)$$

$$=\left(\frac{n}{n+\theta}\right)^{(p-1)/p}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

$$<p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

$$=p\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p$$

例 44 设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(1) 证明 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}$;

(2) 求 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x))$

$$= f'(x) + (f(1-x))' + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} \right)' + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} -$$

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

$$= 0$$

故 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C$（$C$ 是常数）

又 $f(0) = 0$，$f(1-0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x\to 0^+} (-x)\ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right) \Big/ \frac{1}{x} = 0$$

故
$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$$

(2) $I = \int_0^1 \frac{1}{2-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

$$\xlongequal{2-x=y} \int_2^1 \frac{1}{y} \ln(2-y) \mathrm{d}y$$

$$= -\int_1^2 \frac{\ln 2}{y} \mathrm{d}y - \int_1^2 \frac{\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)}{y} \mathrm{d}y$$

$$= -\ln 2 \ln y \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(-\frac{y}{2}\right)^n}{n} \mathrm{d}y$$

$$= -\ln^2 2 + \int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{2^n \cdot n} \mathrm{d}y$$

$$= -\ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n n^2}\Big|_1^2$$

$$= -\ln^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n^2}$$

在(1)的等式中令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$$

故 $$I = -\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$$

例 45 将 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展开为麦克劳林级数.

解 $$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$$

$$= \frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$$

$$= \frac{1-x}{1-x^{16}} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{16n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{16n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{16n+1}$$

$$= 1 - x + x^{16} - x^{17} + \cdots + x^{16n} - x^{16n+1} + \cdots$$

$$x \in (-1,1)$$

例 46 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$x \in (-1,1)$$

故
$$\arctan x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\qquad x\in[-1,1]$$
$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}\qquad x\in[-1,1]$$
令 $x=1$ 得
$$\frac{1+1^2}{1}\arctan 1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}$$
故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

例 47 求 $\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{4!\ 2^4}+\dfrac{\pi^8}{8!\ 2^8}+\cdots+\dfrac{\pi^{12}}{12!\ 2^{12}}+\cdots}{\dfrac{1}{8}+\dfrac{\pi^4}{6!\ 2^6}+\dfrac{\pi^8}{10!\ 2^{10}}+\dfrac{\pi^{12}}{14!\ 2^{14}}+\cdots}$ 的值.

解 设原式的分子为 p，分母为 q，则由于
$$p-\pi^2 q=1-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{4!2^4}-\frac{\pi^6}{6!2^6}+\frac{\pi^8}{8!2^8}-\frac{\pi^{10}}{10!2^{10}}+\cdots$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}=0$$
故 原式$=\dfrac{p}{q}=\pi^2$

例 48 已知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathrm{e}^{-x})^n \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x\mathrm{e}^{-(n+1)x} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(-\frac{1}{n} x\mathrm{e}^{-nx} - \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nx} \right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

例 49 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3(\mathrm{e}^{\pi/x} - 1)}$

解 令 $u = \frac{1}{x}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3(\mathrm{e}^{\pi/x} - 1)} = \int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{\pi u} - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-\pi u}}{1 - \mathrm{e}^{-\pi u}} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} u \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi u} \mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-(n+1)\pi u} \mathrm{d}u$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)\pi} \left(u\mathrm{e}^{-(n+1)\pi u} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi u} \mathrm{d}u \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)^2\pi^2} \mathrm{e}^{-(n+1)\pi u} \Big|_0^{+\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

例 50 证明 $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

证 $\int_0^1 \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big[1 - x - \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \right) + \cdots \Big] \mathrm{d}x$$

$$> \int_0^1 \frac{1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } x = \sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin t - \frac{1}{2}\sin^2 t \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8} - 1 > 0$$

故
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

例 51 将 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 是偶函数，$l=1$，故 $b_n=0$ $(n=1, 2, \cdots)$.

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (2+x)\mathrm{d}x = 5$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (2+x)\cos n\pi x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi^2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{5}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x$$

$$= f(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

当 $x=0$ 时，有

$$\frac{5}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}=f(0)=2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

解得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

例 52 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为连续的偶函数，且 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，试证明在 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数中，系数 $a_{2n}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

解 $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

在第一个积分中令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，在第二个积分中令 $x=\frac{\pi}{2}+t$，则

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi+2nt)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t$$

$$=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

例 53 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，a_k，b_k 是 $f(x)$ 在

$[-\pi,\pi]$上以 2π 为周期的傅里叶系数，试证对任意自然数 n，

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

证 令 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=S_n(x)$

则 $$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x \quad (1)$$

由三角函数系的正交性及傅里叶级数的定义有

$$\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

代入(1)式得

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$$

故 $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

第二部分

第十届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题及解析

试　　题

（1998年10月10日　上午9:00～11:30）

一、填空题

1. 设 $y=x^3\sin x$，则 $y^{(10)}(0)=$________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，则该函数满足的微分方程为________.

3. 具有 n 个不相等实根的 n 次多项式，其一阶导数的不相等实根至少有________个.

4. 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=$________.

5. $\int(\ln x)^n\mathrm{d}x=$________________.

6. 设有曲面 $z=x+f(y-z)$，其中 f 可导，则该曲面在任一点处的切平面必与向量 $\{1,1,1\}$________.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^x-1 & x<0\end{cases}$，则 $\int f(x-1)\mathrm{d}x=$________.

8. $x_n=1+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}=$________$(n=1,2,\cdots)$.

10. 设 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D:$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\\ 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,则 I 在极坐标下的二次积分为________________________.

二、若 $u=f(xyz)$,$f(0)=0$,$f'(1)=1$,且 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2\cdot f'''(xyz)$,求 u.

三、设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,开区间(a,b)内可导,$0\leqslant a<b\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 证明在区间$(a,b)$内至少存在两点 ξ_1,ξ_2,使

$$f'(\xi_2)\mathrm{tg}\,\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\,\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$$

四、证明:若 $q(x)<0$,则方程 $y''+q(x)y=0$ 的任一非零解至多有一个零点.

五、已知锐角$\triangle ABC$,若取点 $P(x,y)$,令 $f(x,y)=|AP|+|BP|+|CP|$($|\cdot|$表示线段的长度). 证明:在 $f(x,y)$取极值的点 P_0 处,向量$\overrightarrow{P_0A}$,$\overrightarrow{P_0B}$,$\overrightarrow{P_0C}$所夹的角相等.

六、设年利率为 i,依复利计算(所谓复利,是指过一定时间,将存款所生利息自动转为本金再生利息,并逐期滚动),欲在第 n 年末提取 n^2 元($n=1,2,\cdots$),并永远能如此提取,问开始至少需要存入本金为多少元(最后需算出与 n 无关的结果)?

七、设函数 $f(x)$具有二阶导数,且 $f''(x)\geqslant 0$,$x\in(-\infty,+\infty)$,函数 $g(x)$在区间$[0,a]$上连续($a>0$),证明

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[g(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\mathrm{d}t\right]$$

以下两题乙组同学不做

八、设函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数,且对任意实数 x_0,y_0 和任意正实数 R,皆有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

其中 L 是半圆：$y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$，则 $P(x,y)\equiv 0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$.

九、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(u_n>0)$ 发散，又 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{S_n}$ 发散；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

解　　析

一、1. $y=x^3\sin x=x^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n+2}$$

由 $2n+2=10$，得 $n=4$，x^{10}的系数为

$\dfrac{-1}{7!}=\dfrac{y^{(10)}(0)}{10!}$，$y^{(10)}(0)=-720$

故填-720

2. $f''(x)=-f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=-f(x)$

故填 $f''(x)+f(x)=0$

3. 填 $n-1$

4. 由于 $f'(x)$连续，有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}} = e^1 = e$$

故填 e

5. 令 $t=\ln x$

$$\int(\ln x)^n dx = \int t^n de^t \qquad \text{（分部积分 } n \text{ 次）}$$

$$= t^n e^t - nt^{n-1}e^t + n(n-1)t^{n-2}e^t - \cdots +$$
$$(-1)^{n-1}n!te^t + (-1)^n n!e^t + C$$
$$= x(\ln x)^n - nx(\ln x)^{n-1} + n(n-1)x(\ln x)^{n-2} - \cdots +$$
$$(-1)^{n-1}n!x\ln x + (-1)^n n!x + C$$

故填 $x[(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} - \cdots +$
$(-1)^{n-1}n!\ln x + (-1)^n n!] + C$

6. 曲面方程为

$$F(x,y,z) = x + f(y-z) - z = 0$$

其法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{1, f', -f'-1\}$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\{1,1,1\} = 1 + f' - f' - 1 = 0$$

故填平行

7. $f(x-1) = \begin{cases} \sin(x-1) & x\geqslant 1 \\ e^{x-1}-1 & x<1 \end{cases}$

$$\int\sin(x-1)dx = -\cos(x-1) + C$$

$$\int(e^{x-1}-1)dx = e^{x-1} - x + C_1$$

由于 $\int f(x-1)\,dx$ 是连续函数，而

$$\lim_{x\to 1^+}[-\cos(x-1)+C] = C-1$$
$$\lim_{x\to 1}(e^{x-1}-x+C_1) = C_1$$

故有 $C-1=C_1$

故填$\begin{cases} -\cos(x-1)+C & x\geqslant 1 \\ e^{x-1}-x-1+C & x<1 \end{cases}$

8. $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2\times 3}+\cdots+\frac{2}{n\ (n+1)}$

$$=1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x_n=\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

故填$\frac{5}{2}$

9. $a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

（令 $x=t+\pi$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-f(t)\cos 2nt\mathrm{d}t$$

$$=0$$

故填 0

10. 填 $\int_{\arctan(1/4)}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_{1/\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}^{2/\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

二、$\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(xyz)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zf'(xyz)+xyz^2f''(xyz)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=f'(xyz)+xyzf''(xyz)+2xyzf''(xyz)+x^2y^2z^2f'''(xyz)$$

$$=f'(xyz)+3xyzf''(xyz)+x^2y^2z^2f'''(xyz)$$

由题设

$$3xyzf''(xyz)+f'(xyz)=0$$

令 $xyz=t$，有

$$3tf''(t) - f'(t) = 0$$

令 $f'(t) = p(t)$，方程化为

$$3tp'(t) + p(t) = 0$$

解得

$$\ln|p(t)| = -\frac{1}{3}\ln|t| + C$$

$$p(t) = C_1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

由 $p(1) = f'(1) = 1$，得 $C_1 = 1$，故

$$f'(t) = p(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

$$f(t) = \frac{3}{2}t^{2/3} + C_2$$

由 $f(0) = 0$，得 $C_2 = 0$，故

$$f(t) = \frac{3}{2}t^{2/3}$$

$$u = \frac{3}{2}(xyz)^{2/3}$$

三、要证等式化为

$$\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}\tan\frac{a+b}{2} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$$

根据柯西中值定理，$\exists\ \xi_1 \in (a,b)$，$\xi_2 \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b) - f(a)}{-\cos b - (-\cos a)} = \frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{\sin b - \sin a} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$$

故有

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos a - \cos b)$$

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b - \sin a)$$

因此有

$$\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos a - \cos b) = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b - \sin a)$$

由于
$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin b-\sin a}=\frac{-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}}$$

$$=\tan\frac{a+b}{2}$$

故
$$\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$$

即
$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$$

四、反证 设 $y=y(x)$是方程的一个非零解，若 $y=y(x)$有两个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，不妨设在(x_1,x_2)内 $y(x)>0$，则由$y'(x)$连续及

$$y''=-q(x)y>0$$

$y'(x)$在$[x_1,x_2]$上是严格单调增加的，故

$$y'(x_1)<y'(x_2)$$

但由导数定义

$$y'(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{y(x)-y(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1^+}\frac{y(x)}{x-x_1}\geqslant 0$$

$$y'(x_2)=\lim_{x\to x_2^-}\frac{y(x)-y(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2^-}\frac{y(x)}{x-x_2}\leqslant 0$$

有 $y'(x_1)\geqslant y'(x_2)$，矛盾.

故 $y=y(x)$至多有一个零点.

五、 设 A、B、C 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，极值点 P_0 的坐标为(x_0,y_0)，则

$$\overrightarrow{P_0A}=\{x_1-x_0,y_1-y_0\}$$
$$\overrightarrow{P_0B}=\{x_2-x_0,y_2-y_0\}$$
$$\overrightarrow{P_0C}=\{x_3-x_0,y_3-y_0\}$$

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

$$f'_x = \sum_{i=1}^{3} \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}$$

$$f'_y = \sum_{i=1}^{3} \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}$$

由题设 $f'_x(x_0, y_0) = 0$，$f'_y(x_0, y_0) = 0$，得

$$\begin{cases} -\dfrac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = \displaystyle\sum_{i=2}^{3} \dfrac{x_0 - x_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}} \\ -\dfrac{y_0 - y_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = \displaystyle\sum_{i=2}^{3} \dfrac{y_0 - y_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -\dfrac{x_0 - x_1}{|\overrightarrow{P_0A}|} = \dfrac{x_0 - x_2}{|\overrightarrow{P_0B}|} + \dfrac{x_0 - x_3}{|\overrightarrow{P_0C}|} \\ -\dfrac{y_0 - y_1}{|\overrightarrow{P_0A}|} = \dfrac{y_0 - y_2}{|\overrightarrow{P_0B}|} + \dfrac{y_0 - y_3}{|\overrightarrow{P_0C}|} \end{cases}$$

两式两边平方再相加得

$$\frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{\overrightarrow{P_0A}^2} = \frac{(x_0 - x_2)^2 - (y_0 - y_2)^2}{\overrightarrow{P_0B}^2} +$$

$$\frac{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}{\overrightarrow{P_0C}^2} +$$

$$2\,\frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) + (y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}{|\overrightarrow{P_0B}|\,|\overrightarrow{P_0C}|}$$

即 $$1 = 1 + 1 + 2\,\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\overrightarrow{P_0B}|\,|\overrightarrow{P_0C}|}$$

因此 $$\cos(\overrightarrow{P_0B}, \overrightarrow{P_0C}) = \frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \overrightarrow{P_0C}}{|\overrightarrow{P_0B}|\,|\overrightarrow{P_0C}|} = -\frac{1}{2}$$

同理 $$\cos(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C}) = \cos(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0B}) = -\frac{1}{2}$$

因此$\overrightarrow{P_0A}$，$\overrightarrow{P_0B}$，$\overrightarrow{P_0C}$所夹的角相等.

六、由复利定义，若初始存入本金 A_0，则到第 n 年末可得本

利和

$$A_n = A_0(1+i)^n$$

故为能在第 n 年末提取 $A_n=n^2$，需要初始本金

$$A_0 = \frac{A_n}{(1+i)^n} = \frac{n^2}{(1+i)^n}$$

若要永远如此提取，需要初始本金为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n}$$

由
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)'$$

$$= x\left(x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)' = x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

得
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n} = S\left(\frac{1}{1+i}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{1+i}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{1+i}\right)^3} = \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$$

故需要存入本金$\frac{(1+i)(2+i)}{i^3}$.

七、证 1　将$[0,a]$ n 等分，分点为 $t_k=\frac{ka}{n}$，记 $x_k=g\left(\frac{ka}{n}\right)$ $(k=1,2,\cdots)$.

由于 $f''(x)\geqslant 0$，故有

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

即
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{ka}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(\frac{ka}{n}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{ka}{n}\right)\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}f\left(g\left(\frac{ka}{n}\right)\right)\frac{a}{n}$$

令 $n\to\infty$，得

$$f\left(\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{ka}{n}\right)\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(g\left(\frac{ka}{n}\right)\right)\frac{a}{n}$$

即 $$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(g(t))\mathrm{d}t$$

证 2　记 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^a g(t)\mathrm{d}t-ax_0=0$$

利用泰勒公式及 $f''(x)\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}f(g(t))&=f(x_0)+f'(x_0)(g(t)-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(g(t)-x_0)^2\\&\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(g(t)-x_0)\end{aligned}$$

积分得

$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))\mathrm{d}t&\geqslant\int_0^a[f(x_0)+f'(x_0)(g(t)-x_0)]\mathrm{d}t\\&=f(x_0)a+f'(x_0)\left[\int_0^a g(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]=af(x_0)\end{aligned}$$

即 $$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(t))\mathrm{d}t\geqslant f(x_0)=f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\mathrm{d}t\right)$$

八、证 1　设 (x_0,y_0) 是平面上任一点，作半径为 R 的半圆 $\overset{\frown}{ACB}$ 如图 68，由题设，有

$$\begin{aligned}\int_A^B P\mathrm{d}x&=\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x=\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\oint_{\overset{\frown}{ABCA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

两边分别利用定积分与二重积分中值定理得

$$P(\xi,y_0)\cdot 2R=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi_1,\eta_1)}\cdot\frac{1}{2}\pi R^2$$

其中 $\qquad \xi\in(x_0-R,x_0+R)$，$(\xi_1,\eta_1)\in D$

$$P(\xi,y_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi_1,\eta_1)}\cdot\frac{1}{4}\pi R$$

令 $R\to 0$，两边取极限得

$$P(x_0,y_0)=0$$

由 (x_0,y_0) 的任意性，$P(x,y)\equiv 0$. 故

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

由 D 的任意性，有 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$.

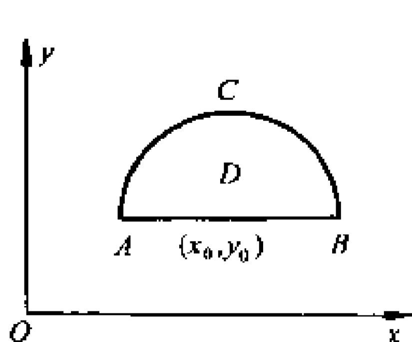


图 68

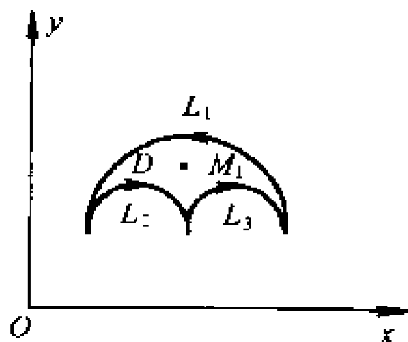


图 69

证 2 首先证 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$. 若存在 $M_1(x_1,y_1)$，使 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，不妨设 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{M_1}>0$，故在 M_1 的某邻域内 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$. 在此邻域内取半圆 L_1、L_2，L_3 如图 69，则

$$0=\oint_{L_1+L_2+L_3}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$$

矛盾. 故 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$.

因此，沿任意水平线段 $\overline{AB}$，有

$$\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x=\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\widehat{ACB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

$\overset{\frown}{ACB}$是半圆．故有

$$P(x,y)\equiv 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

九、(1)$u_n>0$，故$\{S_n\}$单调增加，由于$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散知$S_n\to+\infty$．故对$\forall\ n$，当p充分大时，有

$$\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$$

故

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{u_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k$$

$$=\frac{1}{S_{n+p}}(S_{n+p}-S_n)=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

$$>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

因此根据柯西收敛准则，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$发散．

(2) 由于

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{u_k}{S_k^2}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{u_k}{S_kS_{k-1}}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_kS_{k-1}}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{1}{S_1}=\frac{1}{u_1}$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$的部分和有上界，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛．

第十一届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题及解析

试 题

（1999 年 10 月 9 日　上午 9:00～11:30）

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=$________.

2. 设 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，则 $y^{(n)}=$________________.

3. 设 $y=y(x)$是由 $x-\int_1^{y+x}e^{-t^2}dt=0$ 所确定的函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

4. $\int\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx=$________$+C$.

5. 使 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan ax}{x^\beta}dx$ 收敛的充要条件是 β 满足________，其中 a，β 为常数，且 $a\neq 0$.

6. 设 $\varphi(u,v,w)$有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$是由 $\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 确定的函数，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

7. 设 Γ 为不自交的光滑闭曲线，则曲线积分 $\oint_\Gamma \mathrm{grad}[\sin(x+y+z)]\cdot d\boldsymbol{r}=$________，其中 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}dx+\boldsymbol{j}dy+\boldsymbol{k}dz$.

8. 设 $f(x)=x^{100}e^{x^2}$，则 $f^{(200)}(0)=$________.

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^n})}$ 的收敛域

为______ ______.

10. 设 $y=y(x)$. 如果 $\int y\mathrm{d}x \cdot \int \frac{1}{y}\mathrm{d}x = -1$，$y(0)=1$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$，则 $y=$________.

二、设 $f(x)$ 在包含原点在内的某区间 (a,b) 内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，$f''(x)>0(a<x<b)$，证明 $f(x)\geqslant x(a<x<b)$.

三、设 $a_1=1$，$a_2=2$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，证明：

(1) $\frac{3}{2}a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

四、设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$$

试求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

五、设 L 是不经过点 $(2,0)$、$(-2,0)$ 的分段光滑的简单闭曲线，试就 L 的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$

L 取正向.

六、表面为旋转曲面的镜子应具怎样的形状才能使它将所有平行于其轴的光线反射到一点？求出旋转曲面的方程.

七、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项 $u_n>0$，$n=1$，2，…，$\{v_n\}$ 为一正实数列，记

$$a_n=\frac{u_nv_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 a 为有限正数或正无穷，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

以下两题乙组同学不做

八、求方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的通解.

九、证明：

$$\frac{\pi(R^2-r^2)}{R+K}\leqslant\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant\frac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$$

其中，$0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R$，D：$r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$.

解　　析

一、1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}\cdot n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

故填 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

2. $y=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

故填$\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

3. 在已知方程中令 $x=0$，得 $y=1$. 已知方程两边对 x 求偏导

$$1-\mathrm{e}^{-(y+x)^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1\right)=0$$

令 $x=0$，有　　$1-\mathrm{e}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}+1\right)=0$

解得　　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\mathrm{e}-1$

故填 $\mathrm{e}-1$

4. $\displaystyle\int\frac{\ln x-1}{\ln^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{\ln x} + C$$

故填$\frac{x}{\ln x}$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x$

由于 $\arctan\alpha \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta} < \int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}$

故$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为 $\beta > 1$。

又由于当 $x \to 0$ 时，

$$\frac{\arctan \alpha x}{x^\beta} \simeq \frac{\alpha x}{x^\beta} = \alpha x^{1-\beta}$$

而$\int_0^1 \frac{\alpha}{x^{\beta-1}}\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\beta-1<1$，即 $\beta<2$.

故填 $1<\beta<2$

6. 方程两边对 x 求偏导

$$\varphi_1' \cdot b\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_2' \cdot \left(c - a\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \varphi_3' \cdot (-b) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-c\varphi_2' + b\varphi_3'}{b\varphi_1' - a\varphi_2'}$$

方程两边对 y 求偏导

$$\varphi' \cdot \left(b\frac{\partial z}{\partial y} - c\right) + \varphi_2' \cdot \left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \varphi_2' \cdot a = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\varphi_1' - a\varphi_3'}{b\varphi_1' - a\varphi_2'}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

故填 c

7. $\oint_\Gamma \mathrm{grad}[\sin(x+y+z)] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$= \oint_{\Gamma} \{\cos(x+y+z), \cos(x+y+z), \cos(x+y+z)\} \cdot \{dx, dy, dz\}$$

$$= \oint_{\Gamma} \cos(x+y+z)(dx+dy+dz)$$

$$= \oint_{\Gamma} d\sin(x+y+z) = 0$$

故填 0

8. $f(x) = x^{100} e^{x^2} = x^{100} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+100}}{n!}$

x^{200}的系数为

$$\frac{f^{(200)}(0)}{200!} = \frac{1}{50!}, \quad f^{(200)}(0) = \frac{200!}{50!}$$

故填$\frac{200!}{50!}$

9. $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2^{n+1}}}$

$$= \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

因此当$|x| \geqslant 1$时，级数收敛；当$|x| < 1$时

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^2}{1-x^{2^{n+1}}} = 1 - x^2 \neq 0$$

级数发散.

故填$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

10. 填 e^{-x}

二、由$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$，得

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

故对$\forall\ x\in(a,b)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\geqslant x$$

三、(1) 显然 a_n 单调增加，故

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\leqslant a_{n-1}+a_{n-1}=2a_{n-1}$$

由此得 $a_{n-1}\geqslant\frac{a_n}{2}$，故

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\geqslant a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}$$

故得证.

(2) 由于

$$a_n\geqslant\frac{3}{2}a_{n-1}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}a_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

有 $$0<\frac{1}{a_n}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

四、由已知条件得

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$$

故 $$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

因此 $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)=3$$

有 $$1+\frac{f(x)}{x^2}=3+\alpha \quad (其中\lim_{x\to 0}\alpha=0)$$

$$f(x)=2x^2+\alpha x^2=2x^2+o(x^2)$$

所以 $$f(0)=0,\quad f'(0)=0$$

$$\frac{f''(0)}{2\,!}=2,\quad f''(0)=4$$

由 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

得 $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

五、记 X, Y 的两项分别为 X_1, X_2, Y_1, Y_2, 即 $X=X_1+X_2$, $Y=Y_1+Y_2$, 由

$$\frac{\partial X_1}{\partial y}=\frac{(2-x)^2-y^2}{((2-x)^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y_1}{\partial x} \qquad (除 A(2,0))$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial y}=\frac{(2+x)^2-y^2}{((2+x)^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y_2}{\partial x} \qquad (除 B(-2,0))$$

有 $$\frac{\partial X}{\partial y}\equiv\frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (除点 A,B)$$

当 L 所围区域内不含点 A, B(如图 70), 则 $I=0$.

当 L 所围区域内包含点 A, 但不包含点 B 时(如图 71), 取

L_1: $(x-2)^2+y^2=r^2$ (r 是较小正数)

设 L_1 所围区域为 D_1.

$$I=\oint_{L_1}(X_1+X_2)\mathrm{d}x+(Y_1+Y_2)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L_1}X_1\mathrm{d}x+Y_1\mathrm{d}y+\oint_{L_1}X_2\mathrm{d}x+Y_2\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{L_1} \frac{y\mathrm{d}x + (2-x)\mathrm{d}y}{r^2} + 0$$

$$= \frac{1}{r^2}\iint_{D_1} -2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi$$

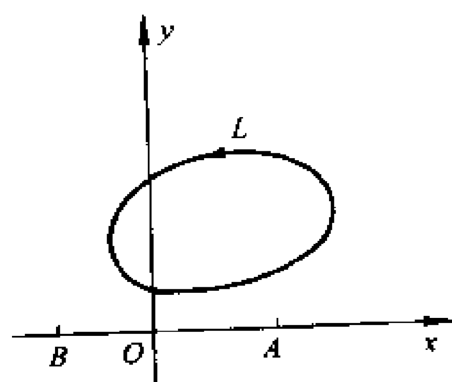


图 70

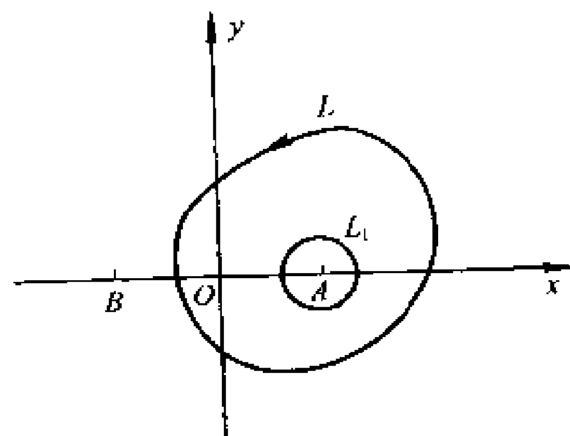


图 71

同理，当 L 所围区域包含 B 但不包含 A 时，有 $I=-2\pi$.
当 L 所围区域内同时包含 A，B 时，取 L_1 同上，取

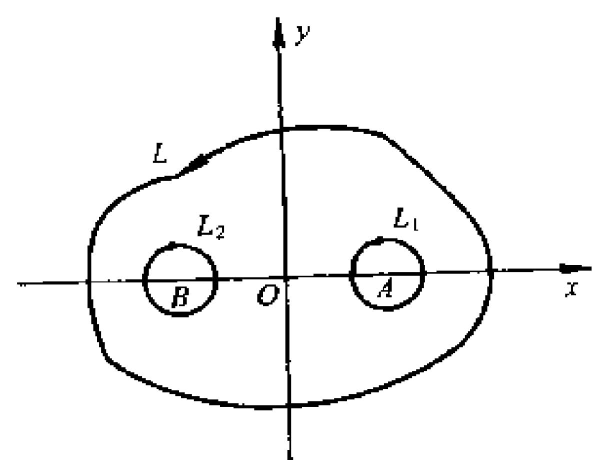


图 72

L_2：$(x+2)^2+y^2=r^2$

$$I=\oint_{L_1}+\oint_{L_2}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L_1}X_1\mathrm{d}x+Y_1\mathrm{d}y+0+\oint_{L_2}X_2\mathrm{d}x+Y_2\mathrm{d}y+0$$

$$=-2\pi-2\pi=-4\pi$$

六、设曲面是由 xOy 面上曲线 L 绕 x 轴旋转而成．如图 73 建立坐标系，假设平行于 x 轴的光线都反射到原点 O，设 $M(x,y)$ 是 L 上任一点，MT 是曲线的切线，由入射角等于反射角，有

$$\angle AMO=\angle TMS=\alpha$$

又 $\angle MAO=\angle TMS$

故 $AO=OM$

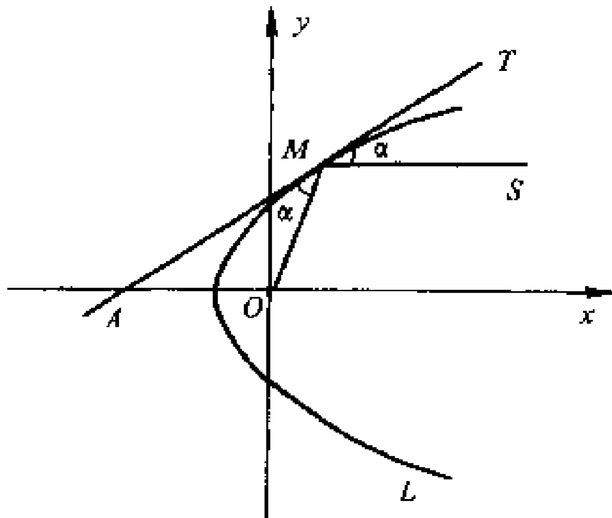


图 73

设 L：$y=y(x)$，则 MT 的方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $Y=0$，得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，故

$$AO=-X=\frac{y}{y'}-x$$

又 $$OM=\sqrt{x^2+y^2}$$

故 $$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

令 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入方程得

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\sqrt{u^2+1}$$

解得 $$u+\sqrt{u^2+1}=Cy$$

由此得 $$-u+\sqrt{u^2+1}=\frac{1}{Cy}$$

两式相减得

$$u=\frac{1}{2}\left(Cy-\frac{1}{Cy}\right)$$

即 $$x=\frac{y}{2}\left(Cy-\frac{1}{Cy}\right)=\frac{1}{2}Cy^2-\frac{1}{2C}$$

故旋转曲面方程为

$$x=\frac{C}{2}(y^2+z^2)-\frac{1}{2C}\qquad (C\text{ 为任意常数})$$

当镜子底面直径为 d，顶点到底面的距离为 h 时，可求得 $C=8\,h/d^2$.

七、当 a 为有限正数，$\exists\ N>0$，当 $n\geqslant N$，有 $a_n>\frac{a}{2}\xlongequal{\text{def}}m$. 当 $a=+\infty$，$\exists\ N>0$，当 $n\geqslant N$，有 $a_n>1$，此时记 $m=1$. 由 a_n 定义式及 $u_n>0$，当 $n\geqslant N$，有

$$a_n=\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}>0$$

$$u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0$$

故有 $$u_{n+1}=\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{m}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{N+n}$ 的部分和 S_n 满足

$$S_n=u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots+u_{N+n}$$

$$\leqslant\frac{1}{m}(u_Nv_N-u_{N+n}v_{N+n})\leqslant\frac{1}{m}u_Nv_N$$

即 $\{S_n\}$ 有上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{N+n}$ 收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

八、方程化成

$$x^3y'''-x^2y''+xy'=\frac{1}{4x} \qquad \text{(欧拉方程)}$$

令 $x=e^t$，即 $t=\ln x$，有

$$y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$y'''=\frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{1}{x}-\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

代入上面方程得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-4\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$r^3-4r^2+4r=0,\quad r_1=0,\quad r_2=r_3=2$$

$$y=C_1+C_2e^{2t}+C_3te^{2t}$$

令 $y^*=Ae^{-t}$，代入方程得

$$A=-\frac{1}{36},\quad y^*=-\frac{1}{36}e^{-t}$$

故通解为

$$y=C_1+C_2e^{2t}+C_3te^{2t}-\frac{1}{36}e^{-t}$$

$$=C_1+C_2x^2+C_3x^2\ln x-\frac{1}{36x}$$

九、设 $M(a,b)$，如图 74，选点 A，B. 对 $\forall\ N(x,y)\in D$，记 $d=MN$，则有

$$d_{\max}\leqslant R+K,\quad d_{\min}\geqslant r-K$$

事实上，根据三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，对 $x^2+y^2=r^2$ 上任意点 P 和 $x^2+y^2=R^2$ 上任意点 Q，有

$$MA=OA-OM=OP-OM\leqslant MP$$

$$MB = OM + OB = OM + OQ \geqslant MQ$$

图 74

故可得 $MA \leqslant d \leqslant MB$，而 $MA = r - K$，$MB = R + K$，故

$$d_{max} \leqslant R + K, \quad d_{min} \geqslant r - K$$

故在 D 上

$$\frac{1}{R+K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leqslant \frac{1}{r-K}$$

又 D 的面积为 $\pi(R^2 - r^2)$，故有

$$\frac{\pi(R^2 - r^2)}{R+K} \leqslant \iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \leqslant \frac{\pi(R^2 - r^2)}{r-K}$$

第十二届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题及解析

试　　题

（2000 年 10 月 14 日　上午 9:00～11:30）

一、填空题

1. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})}=2$，则 $a=$__________.

2. 若$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，且当 $x=0$ 时，$z=\sin y$；$y=0$ 时，$z=\sin x$，则 $z=$__________.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}=$__________.

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 的收敛域为$(-4,2)$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-3)^n$ 的收敛区间为__________.

5. $\int_0^1 t\mathrm{d}t\int_t^1 e^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=$__________.

6. 设 $y=1$，$y=e^x$，$y=2e^x$，$y=e^x+\dfrac{1}{\pi}$都是某二阶常系数线性微分方程的解，则此二阶常系数线性微分方程为__________.

7. 设数列$\{x_n\}$满足：$n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=$__________.

8. 设 $f(x)$在点 $x=0$ 可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，则 $f'(0)=$__________.

9. 设 $f(x)$满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = f(x) + x\sin x$ ，$f(0) = 0$ 且有一阶导数，则当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) =$ ________.

10. 设 C 是从球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上任一点到球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上任一点的任一条光滑曲线($a>0, b>0$)，则 $\int_C r^3(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) =$ ________ ，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

二、设 $f(x)$是$(0,+\infty)$上递减的连续函数，且 $f(x)>0$，证明数列$\{a_n\}$收敛，其中 $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

三、设 S 为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分($z>0$)，点 $P\in S$，π 为 S 在 P 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点到平面 π 的距离，求

$$I = \iint_S z^3\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

四、设一元函数 $u=f(r)$当 $0<r<+\infty$时有连续的二阶导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，又 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，试求 $f(r)$的表达式.

五、设 $u=f(x,y,z)$，f 是可微函数，若$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}$，证明 u 仅为 r 的函数，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

六、设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$发散.

七、一个冬季的早晨开始下雪，且以恒定的速度不停地下．一台扫雪机，从上午 8 点开始在公路上扫雪，到 9 点前进了 2 km，到

10 点前进了 3 km. 假定扫雪机每小时扫去积雪的体积为常数，问何时开始下雪？

以下两题乙组同学不做

八、设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)\neq 0$，证明

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant\frac{4}{b-a}$$

九、设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是实系数多项式，$n\geqslant 2$，且某个 $a_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 及当 $i\neq k$ 时，$a_i\neq 0$，证明：若 $f(x)$ 有 n 个相异的实根，则 $a_{k-1}a_{k+1}<0$.

解　　析

一、1. 当 $x\to 0$ 时，$a\tan x+b(1-\cos x)\simeq ax$，$\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})\simeq -2x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\ln(1-2x)+c(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{-2x}=\frac{-a}{2}=2$$

故填 -4

2. 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=g(x)$. 由题意 $z(x,0)=\sin x$，故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,0)}=\cos x,\quad 得\ g(x)=\cos x$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x,\quad z=\sin x+h(y)$$

由 $z(0,y)=\sin y$，得 $h(y)=\sin y$.

故填 $\sin x+\sin y$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e$$

故填 2e

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$的收敛区间为$(-3,3)$，$R=3$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nt^n$的收敛半径也为3，收敛区间为$(-3,3)$，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-3)^n$的收敛区间为$(0,6)$.

故填$(0,6)$

5. $$\int_0^1 t\mathrm{d}t\int_t^1 \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x t\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\mathrm{e}-1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}-1}{6}$$

故填$\frac{\mathrm{e}-1}{6}$

6. 记$y_1=1$，$y_2=\mathrm{e}^x$，$2\mathrm{e}^x$与$\mathrm{e}^x+\frac{1}{\pi}$都是$y_1$，$y_2$的线性组合，故$r(r-1)=r^2-r=0$为特征方程.

故填$y''-y'=0$

7. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\sin\frac{1}{n+1}=1$

故 $\lim x_n=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=1$$

故填1

8. 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\mathrm{e}^{f(x)}-1}=1$，得
$$\lim_{x\to0}(\mathrm{e}^{f(x)}-1)=0,\quad \lim_{x\to0}f(x)=0$$
故$f(0)=0$，且
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{x^2/2}\frac{x}{2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{\cos x-1}\left(-\frac{x}{2}\right)=0$$

故填0

9. 令$u=tx$，$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

故有 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = xf(x) + x^2\sin x$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x\sin x + x^2\cos x$$

$$f'(x) = -2\sin x - x\cos x$$

故填 $-2\sin x - x\cos x$

10. $\int_C r^3(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) = \int_C r^4\mathrm{d}r$

$= \dfrac{r^5}{5}\Big|_{(A)}^{(B)} = \dfrac{b^5}{5} - \dfrac{a^5}{5}$ （A,B 分别是两球面上的点）

故填 $\dfrac{1}{5}(b^5 - a^5)$

二、由题设有

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

即 $\{a_n\}$ 单调减少，又

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] + f(n) \geqslant 0$$

即 $\{a_n\}$ 有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛.

三、点 $P(x,y,z)$ 处切平面 π 的方程为

$$\frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

故
$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2}}$$

$$S: z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}},\ D_{xy}: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leqslant 1$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - x^2/2 - y^2/2}}dxdy$$

$$I = \iint_S z^3\rho(x,y,z)dS$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)}}\cdot$$

$$\frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\rho^2\right)\rho d\rho = \pi$$

四、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - z^2}{r^3}$$

代入方程得

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$$

令 $f'(r) = p(r)$，得

$$rp' + 2p = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{2}{r}\mathrm{d}r,\quad p=\frac{C_1}{r^2}$$

即
$$f'(r)=\frac{C_1}{r^2}$$

$$f(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

由初始条件得 $C_1=1$，$C_2=1$，故

$$f(r)=1-\frac{1}{r}$$

五、$u=f(x,y,z)$

$$=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$$

令
$$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}=t$$

则
$$f'_x=tx,\quad f'_y=ty,\quad f'_z=tz$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=f'_x\cdot r(-\sin\theta)\sin\varphi+f'_y\cdot r\cos\theta\sin\varphi$$

$$=tx\cdot r(-\sin\theta)\sin\varphi+ty\cdot r\cos\theta\sin\varphi$$

$$=t(-xy+xy)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=f'_x\cdot r\cos\theta\cos\varphi+f'_y\cdot r\sin\theta\cos\varphi+f'_z\cdot r(-\sin\varphi)$$

$$=txr\cos\theta\cos\varphi+tyr\sin\theta\cos\varphi-tzr\sin\varphi$$

$$=tr^2(\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$=tr^2(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)=0$$

故 u 仅为 r 的函数.

六、由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)\Big/\frac{1}{n}=a>0$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

由
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$$

有
$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$$

由于 $f'(x)$ 连续，故在 $x=0$ 的某邻域内 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加，故当 n 充分大时，$f\left(\frac{1}{n}\right)$ 单调减少，又 $\lim_{n\to 0}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

七、设 $t=0$ 时开始下雪，T 为开始下雪到扫雪机开始工作的时间，$x=x(t)$ 为 t 时刻扫雪机前进的距离，下雪速度为常数 A(cm/h)，公路宽为常数，则 t 时刻积雪的厚度为 $h=At$.

由于每小时扫去积雪体积为常数，故扫雪机前进的速度与积雪厚度成反比，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{h}=\frac{k}{At}=\frac{C}{t} \qquad (\text{其中 } C=\frac{k}{A})$$

解得 $$x=C\ln t+C_1$$

由题设，有

$$0=C\ln T+C_1 \tag{1}$$

$$2=C\ln(T+1)+C_1 \tag{2}$$

$$3=C\ln(T+2)+C_1 \tag{3}$$

(2)－(1)得

$$2=C\ln\frac{T+1}{T}$$

(3)－(2)得

$$1=C\ln\frac{T+2}{T+1}$$

故有 $$\frac{1}{2}=\ln\frac{T+2}{T+1}\Big/\ln\frac{T+1}{T},\quad \left(\frac{T+2}{T+1}\right)^2=\frac{T+1}{T}$$

即 $$T^2+T-1=0$$

解得 $T=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618(\mathrm{h})$

$8-T\approx 7.382\approx 7$ 时 22 分 55 秒

即雪是从上午 7 点 22 分 55 秒开始下的.

八、$|f(x)|$在 $[a,b]$ 上连续，故在$[a,b]$上存在最大值，且由于$|f(a)|=|f(b)|=0$，$\exists\ c\in(a,b)$，使

$$|f(c)|=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

根据拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使

$$\frac{f(c)}{c-a}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)$$

$$\frac{f(c)}{c-b}=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\xi_2)$$

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{M}\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{M}\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{M}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{M}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{M}\left|\frac{f(c)}{c-b}-\frac{f(c)}{c-a}\right|$$

$$=\left|\frac{-1}{b-c}-\frac{1}{c-a}\right|=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$$

$$=\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}=\frac{b-a}{\frac{(b-a)^2}{4}-\left(c-\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$\geqslant\frac{b-a}{(b-a)^2/4}=\frac{4}{b-a}$$

九、证 1　$f^{(k-1)}(x)=c_0+c_2x^2+\cdots+c_{n-k+1}x^{n-k+1}$

其中　$c_0=(k-1)!\,a_{k-1}$，$c_2=\dfrac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}\cdots$

因为 $f(x)$有 n 个相异实根，根据洛尔定理可得 $f^{(k-1)}(x)$有 $n-k+1$个相异的实根，$f^{(k)}(x)$有 $n-k$ 个实根，且 $f^{(k-1)}(x)$的每两个相邻的根之间有且只有一个 $f^{(k)}(x)$的根.

假设 a_{k-1}，a_{k+1}同号，不妨设 $a_{k-1}>0$，$a_{k+1}>0$，则 $f^{(k-1)}(x)$在 $x=0$ 左方单调减，右方单调增，又 $f^{(k)}(0)=0$，则 $f^{(k-1)}(0)=$

$c_0>0$ 为 $f^{(k-1)}(x)$的极小值.

若 $f^{(k)}(x)$无其他根，则处处有 $f^{(k-1)}(x)>f^{(k-1)}(0)$，因此 $f^{(k-1)}(x)$无实根，矛盾，故 $f^{(k)}(x)$除 $x=0$ 外，还有其他实根. 设 x_0 是与 $x=0$ 相邻的实根，则在 x_0 与 0 之间 $f^{(k-1)}(x)\geqslant c_0>0$，与 $f^{(k-1)}(x)$在 x_0 与 0 之间应有一根矛盾. 故得证.

证 2　$f^{(k-1)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-k+1}x^{n-k+1}$

其中 $c_0=(k-1)!\,a_{k-1}\neq0$，$c_1=k!\,a_k=0$，$c_2=\dfrac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}\neq0$，…由题设可得知 $f^{(k-1)}(x)$有 $n-k+1$ 个相异实根，设为 x_1，x_2，…，x_{n-k+1}，由于 $c_0\neq0$，故 $x_1x_2\cdots x_{n-k+1}\neq0$. 且有

$$f^{(k-1)}(x)=c_{n-k+1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-k+1})$$

比较 x 的同次幂系数得

$$c_0=(-1)^{n-k+1}c_{n-k+1}x_1x_2\cdots x_{n-k+1}\neq0$$

$$c_1=(-1)^{n-k}c_{n-k+1}x_1x_2\cdots x_{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{x_i}=0$$

$$c_2=(-1)^{n-k-1}c_{n-k+1}x_1x_2\cdots x_{n-k+1}\sum_{i<j=2}^{n-k+1}\frac{1}{x_ix_j}\neq0$$

若 $a_{k-1}a_{k+1}>0$，则$\dfrac{c_2}{c_0}>0$，故有

$$\sum_{i<j=2}^{n-k+1}\frac{1}{x_ix_j}>0$$

由 $c_1=0$，有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{x_i}=0$，于是有

$$0=\left(\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{x_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{x_i^2}+2\sum_{i<j=2}^{n-k+1}\frac{1}{x_ix_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{x_i^2}=-2\sum_{i<j=2}^{n-k+1}\frac{1}{x_ix_j}<0$$

矛盾，故只能 $a_{k-1}a_{k+1}<0$.

证 3　$f^{(k-1)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-k+1}x^{n-k+1}$

其中 $c_0=(k-1)!a_{k-1}\neq 0$，$c_1=k!a_k=0$，$c_2=\frac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}\neq 0$，…由题设可得 $f^{(k-1)}(x)$ 有 $n-k+1$ 个相异实根，设为 x_1，x_2，…，x_{n-k+1}，由于 $c_0\neq 0$，故 $x_1x_2\cdots x_{n-k+1}\neq 0$，因此多项式

$$g(x)=c_{n-k+1}+c_{n-k}x+\cdots+c_2x^{n-k-1}+c_1x^{n-k}+c_0x^{n-k+1}$$

有 $n-k+1$ 个相异实根 $\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，…，$\frac{1}{x_{n-k+1}}$，根据洛尔定理

$$g^{(n-k-1)}(x)=(n-k-1)!c_2+(n-k)!c_1x+\frac{(n-k+1)!}{2!}c_0x^2$$

有两个不相等的实根，因此

$$\Delta=[(n-k)!c_1]^2-4\frac{(n-k+1)!}{2!}c_0\cdot(n-k-1)!c_2$$

$$=-4\frac{(n-k+1)!}{2!}(n-k-1)!c_0c_2>0$$

$c_0c_2<0$，故 $a_{k-1}a_{k+1}<0$.

第十三届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题及解析

试　　题

（2001年10月13日　上午9:00～11:30）

一、填空题

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则正整数 k 的最小值为________.

2. 设由 y 轴、$y=x^2$、$y=a(0<a<1)$所围的平面图形，由 $y=a$、$y=x^2$、$x=1$ 所围的平面图形都绕 y 轴旋转所得旋转体的体积相等，则 $a=$________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-x & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases}$，而 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$，$n=0$，1，2，…则 $S\left(-\dfrac{9}{2}\right)=$________.

4. $y=f(x)$二阶可导，且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(4-y)y^\beta(\beta>0)$，若 $y=f(x)$ 的一个拐点是 $(x_0, 3)$，则 $\beta=$________.

5. 设 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，则 $y^{(10)}|_{x=0}=$________.

6. $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x=$________$+C$.

7. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\underline{\qquad\qquad}.$$

8. 设 Ω 为区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V=$ $\underline{\qquad\qquad}$.

9. 若可微函数 $f(x,y)$ 对任意 x、y、t 满足 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$，$P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，且 $f'_x(1,-2)=4$，则曲面在 P_0 处的切平面方程为$\underline{\qquad\qquad}$.

10. 设 $m\geqslant 1$ 为正整数，a_n 是 $(1+x)^{n+m}$ 中 x^n 的系数，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\underline{\qquad\qquad}$.

二、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=f'(1)=f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

三、设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x,n\geqslant 1$

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛；

(2) 证明 $a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}$，$n>2$；

(3) 证明 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

四、从已知 $\triangle ABC$ 的内部的点 P 向三边作三条垂线，求使此三条垂线长的乘积为最大的点 P 的位置.

五、求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n-1)!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

六、设有一半径为 R 的球形物体，其内任意一点 P 处的体密度 $\rho=\frac{1}{|PP_0|}$，其中 P_0 为一定点，且 P_0 到球心的距离 r_0 大于 R，求该物体的质量.

七、当一架超音速飞机在高空沿水平方向以速度 v 作匀速直线飞行时，由于飞机的速度比音速快，所以人们常常是先看到飞机在空中掠过，片刻之后才听到震耳的隆隆声，那么在同一时刻，天空中的什么区域可以听到飞机的声音呢?(设声音在空气中的传播速度为 v_0，$v_0<v$)．

以下两题乙组同学不做

八、设 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，证明

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy \geqslant 1$$

九、(1) 构造一正项级数，使得可用根值审敛法判定其敛散性，而不能用比值审敛法判定其敛散性.

(2) 构造二级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，使得$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=l$ 存在，且 $0<|l|<+\infty$，但二级数的敛散性不同.

解　　析

一、1. 由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{k-1}\sin\frac{1}{x}$$

若极限存在，需要 $k-1>0$，$k>1$.

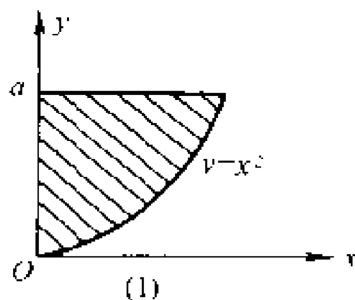
故填 2

2. 由 y 轴，$y=x^2$，$y=a$ 所围平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

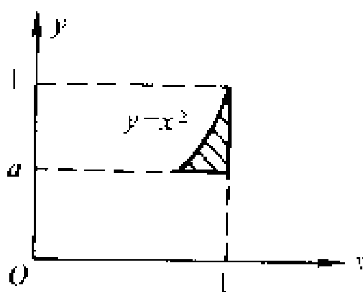
$$\int_0^a \pi y dy=\frac{\pi a^2}{2}$$

由 $y=a$，$y=x^2$，$x=1$ 所围的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$\pi(1-a)-\int_a^1\pi y dy=\frac{\pi}{2}(a^2-2a+1)$$



(1)



(2)

图 75

由题设

$$\frac{\pi}{2}a^2 = \frac{\pi}{2}(a^2 - 2a + 1)$$

解得 $a=\frac{1}{2}$.

故填$\frac{1}{2}$

3. 由题设，$S(x)$是 $f(x)$的以 2 为周期的余弦级数的和函数，因此

$$S\left(-\frac{9}{2}\right)=S\left(-\frac{9}{2}+4\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\frac{3}{8}$$

故填$\frac{3}{8}$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}=-y^{\beta}\frac{dy}{dx}+\beta(4-y)y^{\beta-1}\frac{dy}{dx}$

$=y^{2\beta-1}(4\beta-(1+\beta)y)(4-y)$

由题设，在点$(x_0,3)$，$\frac{d^2y}{dx^2}=0$，故

$$4\beta-3(1+\beta)=0,\quad \beta=3$$

故填 3

5. $y=\frac{2+(x-1)}{\sqrt{1-x}}=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$y^{(10)}(0)=2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{19}{2}\right)-$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{17}{2}\right)$

$=\frac{2\times 19!!}{2^{10}}+\frac{17!!}{2^{10}}=\frac{39\times 17!!}{2^{10}}$

故填$\frac{39\times 17!!}{2^{10}}$

6. $\int\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1-x^4}}=\int\frac{dx}{x^5\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{5/4}}$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{5/4}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1/4}} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^4}} + C$$

故填$\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-f(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0}\frac{2xf'(x^2)}{f(x)}$$

$$= 2\frac{1}{[f'(0)]^2}\lim_{x\to 0}f'(x^2) = 2\frac{1}{f'(0)} = 2$$

故填 2

8. 由对称性

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{15}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

故填$\frac{4}{15}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

9. $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$

两边对 t 求偏导

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=2tf(x,y)$$

$$txf_1'(tx,ty)+tyf_2'(tx,ty)=2t^2f(x,y)=2f(tx,ty)$$

将 $tx=1$，$ty=2$，$f(1,-2)=2$，$f_1'(1,-2)=4$ 代入，得

$$f_2'(1,-2)=0$$

故切平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{4,0,-1\}$$

切平面方程为

$$4(x-1)-(z-2)=0$$

即
$$4x-z-2=0$$

故填 $4x-z-2=0$

10. $a_n=\dfrac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-n+1)}{n!}=\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$

当 $m=1$，$a_n=n+1$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty$$

当 $m>1$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n)!}$$

$$=\frac{m!}{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n-(n+1))n!}{(m+n)!}$$

$$=\frac{m!}{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n!}{(m+n-1)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n)!}\right]$$

$$=\frac{m!}{m-1}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(m-1)!}-\frac{(n-1)!}{(m+n)!}\right]$$

$$=\frac{m!}{m-1}\cdot\frac{1}{(m-1)!}=\frac{m}{m-1}$$

故填 $\begin{cases}\dfrac{m}{m-1} & m>1\\ +\infty & m=1\end{cases}$

二、令　$F(x)=(f'(x)-f(x))e^x$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $F(0)=F(1)=0$，根据洛尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$(f''(\xi)-f(\xi))\mathrm{e}^{\xi}=0$$

由于 $\mathrm{e}^{\xi}\neq 0$，故有

$$f''(\xi)=f(\xi)$$

三、(1) 在 $[0,\pi/4]$，$0\leqslant\tan x\leqslant 1$，$\tan^n x$ 单调减少，故 a_n 单调减少，且 $a_n\geqslant 0$，因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2)
$$\begin{aligned}a_n+a_{n-2}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n-2}x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(\tan^2 x+1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x\\&=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

(3)
$$2a_n<a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}$$
$$2a_n>a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$$

故得
$$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$$

四、如图 76，设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b，c，P 到三边的距离分别为 x、y，z，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则有

$$ax+by+cz=2S$$

下面在此条件下求 $f(x,y,z)=xyz$ 的最大值点. 令

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(ax+by+cz-2S)$$

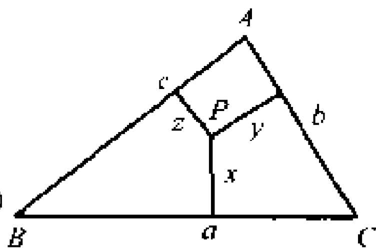


图 76

$$\begin{cases} F'_x = yz + \lambda a = 0 \\ F'_y = xz + \lambda b = 0 \\ F'_z = xy + \lambda c = 0 \\ ax + by + cz = 2S \end{cases}$$

由前三式得

$$ax = by = cz$$

代入第四式得

$$x = \frac{2S}{3a},\ y = \frac{2S}{3b},\ z = \frac{2S}{3c}$$

由问题的实际意义，f 确有最大值. 故当 P 到长为 a，b，c 的边的距离分别为$\frac{2S}{3a}$，$\frac{2S}{3b}$，$\frac{2S}{3c}$时，三垂线长的乘积达到最大.

五、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{n^3(n+2)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+2)n^3} = 0$

故 $R=+\infty$，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n^2-n^2-n+n+1-1}{(n+1)!}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(n+1)-n(n+1)+(n+1)}{(n+1)!}(-x)^n - \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{n!}(-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n - \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n \end{aligned}$$

$$= x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= x^2 e^{-x}+e^{-x}+\frac{1}{x}(e^{-x}-1)$$

$$= e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

显然 $S(0)=0$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n=\begin{cases}e^{-x}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

六、如图 77 建立坐标系，设 $P(x,y,z)$，则

$$\rho=\frac{1}{|PP_0|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}}$$

$$m=\iiint_V\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-r_0)^2}}\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2-2r_0r\cos\varphi+r_0^2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\int_0^R\frac{r}{r_0}\sqrt{r^2-2r_0r\cos\varphi+r_0^2}\Big|_0^{\pi}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{r_0}\int_0^R r\Big(\sqrt{r^2+2r_0r+r_0^2}-$$

$$\sqrt{r^2-2r_0r-r_0^2}\Big)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{r_0}\int_0^R r[(r+r_0)-|r-r_0|]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{r_0}\int_0^R 2r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi R^3}{3r_0}$$

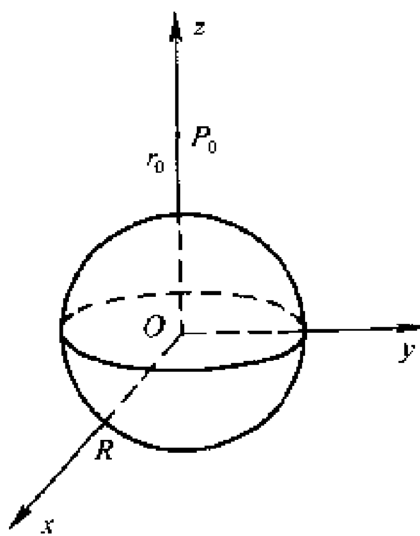


图 77

七、如图 78，设 $t=0$ 时飞机在原点，飞机沿 x 轴正方向飞行，则 $t=a$ 时刻飞机在点$(va,0,0)$，下面求此时刻能

听到飞机声的范围.

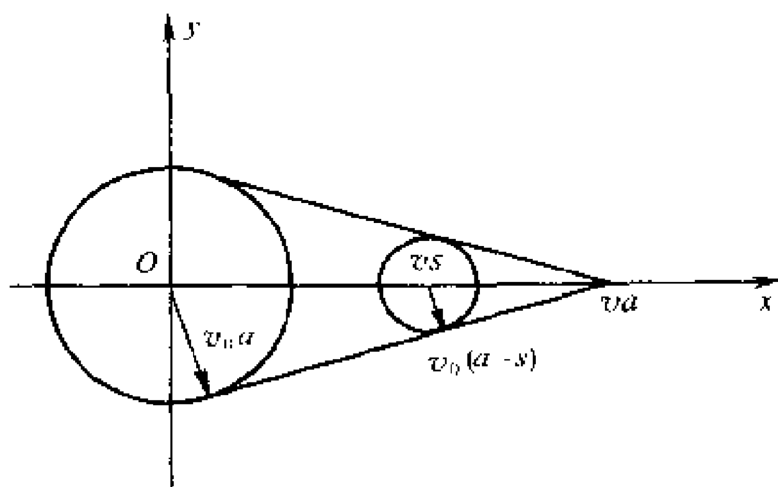


图 78

飞机作为一个主声源，任何时刻都在发出球面波. 对[0,a]内的任意时刻 s，这个球面波的波前半径为 $v_0(a-s)$，而球心在点 $(vs,0,0)$处，故波前方程为

$$(x-vs)^2+y^2+z^2=v_0^2(a-s)^2 \qquad (0\leqslant s\leqslant a)$$

当 s 由 0 变到 a 时，这是一个含有参数 s 的球面族. 由于在 $t=a$ 时声音不会超出这些球面，所以这个球面族所充斥的区域就是所能听到飞机声的区域，而在球面族之外，则听不到飞机的声音.

为了消去参数 s，方程两边对 s 求偏导，得

$$v(x-vs)=v_0^2(a-s)$$

$$s=\frac{vx-v_0^2a}{v^2-v_0^2}$$

代入原方程

$$\left(x-v\,\frac{vx-v_0^2a}{v^2-v_0^2}\right)^2+y^2+z^2=v_0^2\left(a-\frac{vx-v_0^2a}{v^2-v_0^2}\right)^2$$

整理得

$$y^2 + z^2 = \frac{v_0^2}{v^2 - v_0^2}(x - va)^2 \qquad (x \leqslant va)$$

这是一个以$(va,0,0)$为顶点，x轴为对称轴的圆锥面，圆锥面所围区域即为$t=a$时刻能听到飞机声的区域. 此锥面方程称为马赫锥方程.

八、证1

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left[1 + (f(x) - f(y)) + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{2!}(f(x) - f(y))^2\right]\mathrm{d}y$$

$$\geqslant \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[1 + f(x) - f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 1 + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y = 1$$

证2

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{e}^{f(y)}\mathrm{d}y\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)} + \mathrm{e}^{f(y)-f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 2\sqrt{\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y = 1$$

九、(1) 令$u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{4^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{4} = \frac{1}{4} < 1$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{4(2+(-1)^n)}$$

此极限不存在，故不能用比值审敛法.

(2) 令 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，$v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=1$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

北京理工大学1999年数学竞赛试题及解析

试　　题

一、求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x\right)^{1/x}$的值.

二、已知$y=\sqrt[4]{x^3\sqrt{e^x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}}}}$，求$y'$.

三、已知$z=uv$，$x=u+\dfrac{1}{v}$，$y=v+\dfrac{1}{u}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、设$f(x)$为连续函数，证明：

$$\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

其中D：$|x|\leqslant\dfrac{A}{2}$，$|y|\leqslant\dfrac{A}{2}$，A是正的常数.

五、求曲线积分$I=\oint_C\dfrac{(x+4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$的值，其中

C：$(x-a)^2+(y-a)^2=1$取正向一周$\left(a\neq\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right)$.

六、流速为$\boldsymbol{v}=x^3\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^4\boldsymbol{k}$的流体，流过由曲面$z=4-(x^2+y^2)$与曲面$z=1-\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$所围成的立体，今有平行于$xOz$面的平面截此立体，问沿$y$轴方向通过哪个截面的流量最大.

七、设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$4\int_{3/4}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，求证：在$(0,1)$内存在一点$c$，使$f'(c)=0$.

八、某容器的形状是由曲线$x=f(y)$绕y轴旋转而成的立体，今按$2t\,\mathrm{cm}^4/\mathrm{s}$的速率往里注水，为使水面上升速率恒为$\dfrac{2}{\pi}\mathrm{cm/s}$，问

$f(y)$应是怎样的函数.

九、设 $x_1=a$，$x_2=b$，当 $n\geqslant 3$ 时，$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

十、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$（$A,B$ 是实数），求证：至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

解　　析

一、设 $y=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{1/x}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x-1\right)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}=\frac{1}{2}$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{1/x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

二、$y=x^{3/4}\mathrm{e}^{x/8}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{16}}$

$$y'=\frac{3}{4}x^{-1/4}\mathrm{e}^{x/8}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{16}}+\frac{1}{8}x^{3/4}\mathrm{e}^{x/8}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{16}}-\frac{1}{16}x^{-5/4}\mathrm{e}^{x/8}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-\frac{15}{16}}\cos\frac{1}{x}$$

三、二方程两边对 x 求偏导

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x} = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} \\
1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\
0 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}
\end{cases}
$$

解得

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2v^2}{u^2v^2 - 1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v^2}{u^2v^2 - 1}
$$

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{uv^2 + u^2v^3}{u^2v^2 - 1}
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}v^2 + 2uv\frac{\partial v}{\partial x} + 2uv^3\frac{\partial u}{\partial x} + 3u^2v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(u^2v^2 - 1) - (uv^2 + u^2v^3)\left(2uv^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]/(u^2v^2 - 1)^2
$$

$$
= \frac{2(uv^3 + u^3v^5 + 2u^2v^4)}{(u^2v^2 - 1)^3}
$$

四、$\displaystyle\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$
= \int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x\int_{-A/2}^{A/2} f(x-y)\mathrm{d}y
$$

$$
\xlongequal{\text{令 } t = x - y} \int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x\int_{x-A/2}^{x+A/2} f(t)\mathrm{d}t
$$

$$
= \int_{-A}^{0} f(t)\mathrm{d}t\int_{-A/2}^{t+A/2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{A} f(t)\mathrm{d}t\int_{t-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x
$$

$$
= \int_{-A}^{0} f(t)(A + t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} f(t)(A - t)\mathrm{d}t
$$

$$
= \int_{-A}^{A} f(t)(A - |t|)\mathrm{d}t
$$

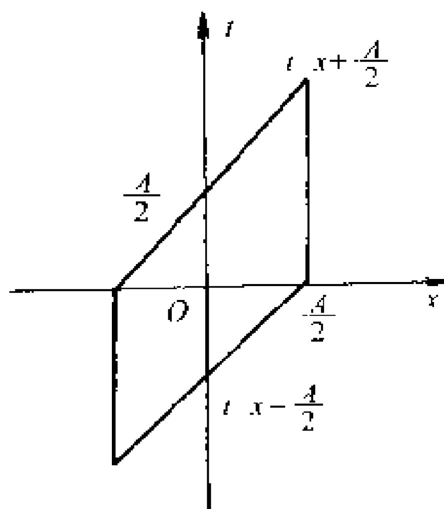


图 79

五、 $X=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2}$， $Y=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$

当 $x^2+4y^2\neq 0$，有

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

设曲线 C 所围区域为 D. 当 $|a|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$(0,0)\notin D$，如图 80，则 $I=0$.

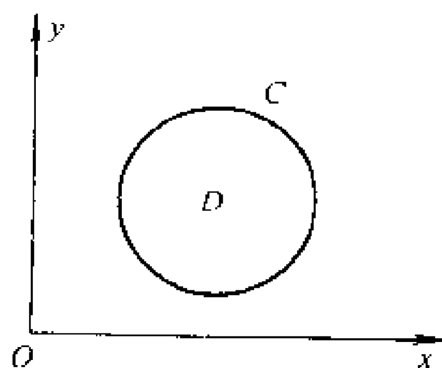


图 80

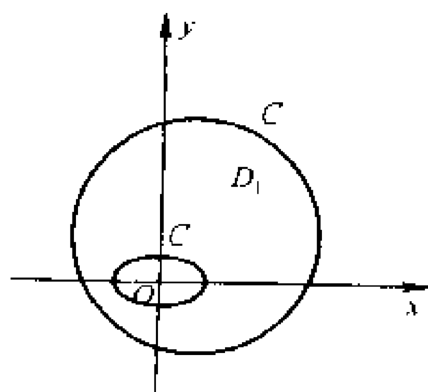


图 81

当 $|a|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$(0,0)\in D$. 如图 81，取 C_1：$x^2+4y^2=\varepsilon^2$（ε 是很小的正数），设 C_1 与 C 所围区域为 D_1、C_1 所围区域为 D_2，则

$$I=\oint_{C+C_1}-\oint_{C_1}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_1}(x+4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_2}(1-(-1))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi$$

六、两曲面交线

$$\begin{cases} z = 4 - (x^2 + y^2) \\ z = 1 - \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

设立体上过点$(0,y,0)$且与 y 轴垂直的截面为 S_y，它在 zOx 面上的投影为

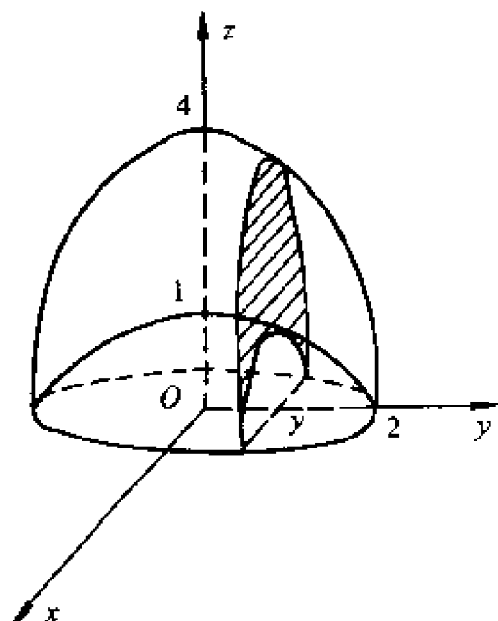


图 82

$$D_{zx}:\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant 4 - (x^2 + y^2) \\ -\sqrt{4 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2} \end{cases}$$

通过 S_y 的流量为

$$Q(y) = \iint\limits_{S_y} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{S_y} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}x\int_{1-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{4-(x^2+y^2)} y^2\mathrm{d}z$$

$$= y^2(4 - y^2)^{3/2}$$

令 $$Q'(y)=y(4-y^2)^{1/2}(8-5y^2)=0$$
得 $$y=\pm\sqrt{8/5}$$

由问题的实际意义，$Q(y)$确有最大值，故当 $y=\pm\sqrt{8/5}$时，流量最大.

七、由积分中值定理，$\exists\ \xi\in\left(\frac{3}{4},1\right)$，使

$$4\int_{\frac{3}{4}}^{1}f(x)\mathrm{d}x = 4f(\xi)\left(1-\frac{3}{4}\right)=f(\xi)$$

由已知条件，有 $f(\xi)=f(0)$. 根据洛尔定理，$\exists\ c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使

$$f'(c)=0$$

八、在$[y,y+\mathrm{d}y]$上，体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi f^2(y)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi f^2(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\pi f^2(y)\frac{2}{\pi}=2f^2(y)$$

又$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2t$，故得

$$t=f^2(y)$$

两边对 t 求导

$$1=2f(y)f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2f(y)f'(y)\frac{2}{\pi}$$

$$2f'(y)f(y)=\frac{\pi}{2}$$

$$f^2(y)=\frac{\pi}{2}y+C$$

$$f(y)=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}y+C}$$

九、$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})-x_n$

$$=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-1}-x_{n-2})$$

$$=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$$

$$x_{n+1}=x_1+\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)$$

$$=a+(b-a)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[a+(b-a)\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$=a+(b-a)\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{a+2b}{3}$$

十、若 $f''(x)$ 不存在等于零的点，则必恒有 $f''(x)>0$，或恒有 $f''(x)<0$，否则由达布定理，必存在 ξ 使 $f''(\xi)=0$. 不妨设恒有 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 不为常数. $\exists\, x_0$，使 $f'(x_0)\neq 0$，则在 x_0 与 x 之间存在 c，使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (x\neq x_0)$$

$$>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

若 $f'(x_0)>0$，则有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=+\infty$$

与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ 矛盾. 若 $f'(x_0)<0$，则有

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\geqslant\lim_{x\to-\infty}[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=+\infty$$

与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 矛盾.

因此，必存在点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

北京理工大学 2000 年数学竞赛试题及解析

试　题

一、填空题

1. 设 $\varphi(x-az, y-bz)=0$，则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

2. 二元函数 $z=x^2y^3+\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域是________.

3. 微分方程 $\left(e^y-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(xe^y+\frac{1}{x}\right)dy=0$ 的通解是________.

4. 已知二阶线性非齐次方程的三个特解为 $y_1=x-(x^2+1)$，$y_2=3e^x-(x^2+1)$，$y_3=2x-e^x-(x^2+1)$，则该方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 的特解为______.

5. 求 $I=\int_0^{\pi/6}dy\int_y^{\pi/6}\frac{\cos x}{x}dx=$________.

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}$ 的收敛域为______.

7. 设一力场 $\boldsymbol{F}$ 的大小与作用点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离成反比，方向总是指向原点. 当质点受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用从点 $A(0,0,e)$ 沿螺旋线 $x=\frac{1}{2}(1+\cos t)$，$y=\sin t$，$z=\frac{e}{\pi}t$ 到点 $B\left(\frac{1}{2},1,\frac{e}{2}\right)$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=$________.

8. 设 S 是曲面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧，则曲面积分 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=$________.

9. 已知函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t\,(x\geqslant -1)$，则 $f(x)$ 与 x 轴所围成的面积为________.

10. 设 D 为区域 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则积分 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

二、确定 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ $(\alpha(0)=\beta(0)=0)$，使当 $X=[x\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y$，$Y=y\alpha(x)+\beta(x)$ 时，$\oint_C X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=0$ 沿任一闭曲线 C 都成立.

三、设曲面 S 是圆柱体 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 4$ 位于 $z=1$ 与 $z=3$ 之间的立体 V 的表面，证明

$$\left|\oiint\limits_S \cos(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sin(2xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant 16\sqrt{3}\pi$$

四、设水库的容量为 100 ML（百万升），每天向城市供水 1 ML，同时每天有 0.9 ML 的泉水和 0.1 ML 的地表水流入水库，泉水是纯净的，地表水是浓度为 0.0001 kg/L 的盐水，设初始时刻水库的水不含盐，求水库中水的浓度函数（设任意时刻水库中各处浓度相同，水库容量不变）.

五、设 $k>2\mathrm{e}$，求证：直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 恰有两个交点.

六、设 $\alpha>1$，求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}$ 收敛.

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

求证：存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f''(x_0)=0$.

八、设 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{l}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中三个线性无关的单位向量，函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中可微，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}=0$，试证 $f(x,y,z)=$ 常数.

九、(1) 对于曲线 $y=f(x)$，试在横坐标 a 与 $a+h$ 之间找一

点 ξ，使在这点两边阴影部分的面积相等(如图 83).

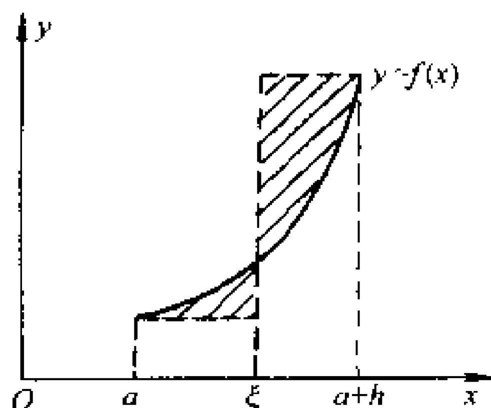


图 83

(2) 在(1)中设曲线为 $y=e^x$，记 $\xi=a+\theta h$，其余乃如(1)所述，求 θ，并计算 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

解　　析

一、1. $\varphi_1'\cdot\left(1-a\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\varphi_2'\cdot\left(-b\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi_1'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}$$

$$\varphi_1'\cdot\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\varphi_2'\cdot\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2'}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

故填 1

2. 由 $\dfrac{4}{x^2+y^2}\geqslant 1$，$-1\leqslant\dfrac{1}{x^2+y^2}\leqslant 1$，得 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

故填 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$

3. $\frac{\partial Y}{\partial x}=e^{y}-\frac{1}{x^{2}}=\frac{\partial X}{\partial y}$

方程是全微分方程

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)}\left(e^{y}-\frac{y}{x^{2}}\right)dx+\left(xe^{y}+\frac{1}{x}\right)dy$$

$$=\int_{0}^{y}(e^{y}+1)dy+\int_{1}^{x}\left(e^{y}-\frac{y}{x^{2}}\right)dx$$

$$=xe^{y}+\frac{y}{x}-1$$

故填 $xe^{y}+\frac{y}{x}=C$

4. 解1　方程通解为

$$y=C_{1}(y_{2}-y_{1})+C_{2}(y_{3}-y_{1})+y_{1}$$
$$=C_{1}(3e^{x}-x)+C_{2}(x-e^{x})+x-(x^{2}+1)$$

由初始条件得 $C_{1}=-\frac{1}{2}$，$C_{2}=-\frac{5}{2}$，故得

$$y=e^{x}-x^{2}-x-1$$

解2　由于 $y_{2}-y_{1}=3e^{x}-x$ 与 $y_{3}-y_{1}=x-e^{x}$ 都是 x 与 e^{x} 的线性组合，故方程通解为

$$y=C_{1}x+C_{2}e^{x}+x-(x^{2}+1)$$

由初始条件得 $C_{1}=-2$，$C_{2}=1$，故得

$$y=e^{x}-x^{2}-x-1$$

故填 $y=e^{x}-x^{2}-x-1$

5. $I=\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos x}{x}dx\int_{0}^{x}dy=\int_{0}^{\pi/6}\cos x\,dx=\frac{1}{2}$

故填 $\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_{n}(x)}\right|=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$

当 $|x|<1$，

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^2}{1-x^{2^{n+1}}} = 1-x^2 \neq 0$$

故填 $|x|\geqslant 1$

7. $|\boldsymbol{F}| = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\overrightarrow{MO} = \{-x,-y,-z\}$

$$\boldsymbol{F}^0 = \overrightarrow{MO}^0 = \frac{\{-x,-y,-z\}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}^0 = \frac{-k\{x,y,z\}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$W = \int_{\widehat{AB}} \frac{k}{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$

$$= \int_{\widehat{AB}} \frac{-\frac{k}{2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= -\frac{k}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)\Big|_{(A)}^{(B)} = -\frac{k}{2}\ln\frac{e^2+5}{4e^2}$$

故填 $-\dfrac{k}{2}\ln\dfrac{e^2+5}{4e^2}$

8. 由高斯公式

$$I \xlongequal{\text{def}} \iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V 2(x+y+z)\mathrm{d}V$$

令 $x=a+r\cos\theta\sin\varphi$，$y=b+r\sin\theta\sin\varphi$，$z=c+r\cos\varphi$

$$I = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}(a+b+c+r\cos\theta\sin\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$$

故填 $\dfrac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$

9. 当 $x\leqslant 0$，

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

当 $x>0$

$$f(x)=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$f(x)=0$ 有两根 $x=-1$ 和 $x=1+\sqrt{2}$.

$$A=\int_{-1}^{1+\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1-\sqrt{2}}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故填 $1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

10. $$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)R^4$$

故填 $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)R^4$

二、由题设，有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，即

$$y\alpha'(x)+\beta'(x)=2y(x\alpha(x)+\beta(x))+3x^2$$

比较 y 的同次幂系数得

$$\begin{cases}\alpha'(x)-2x\alpha(x)+2\beta(x)\\ \beta'(x)=3x^2\end{cases}$$

解得 $\qquad\beta(x)=x^3+C_1$

由 $\beta(0)=0$，得 $C_1=0$，$\beta(x)=x^3$. 从而

$$\alpha'(x)-2x\alpha(x)=2x^3$$

解得 $\qquad\alpha(x)=C_2e^{x^2}-x^2-1$

由 $\alpha(0)=0$，得 $C_2=1$，故

$$\alpha(x) = \mathrm{e}^{x^2} - x^2 - 1,\ \beta(x) = x^3$$

三、$\left|\oiint\limits_S \cos(x^2 + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \sin(2xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$

$$= \left|\oiint\limits_S \{\cos(x^2 + y), \sin(2xy^2), 1\} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right|$$

$$= \left|\oiint\limits_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right| \leqslant \oiint\limits_S |\boldsymbol{A}|\mathrm{d}S$$

$$\leqslant \sqrt{3}\oiint\limits_S \mathrm{d}S = \sqrt{3}(2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 2) = 16\sqrt{3}\pi$$

四、设 t 时刻含盐量为 $m(t)$，水的浓度为 $c(t)$，则在时间 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内，含盐量的改变量为

$$\mathrm{d}m = 0.0001 \times 0.1 \times 10^6\mathrm{d}t - c(t) \times 1 \times 10^6\mathrm{d}t$$

由于 $c(t) = \dfrac{m(t)}{100 \times 10^6}$，故有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 10 - \dfrac{m}{100} \\ m|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解得 $\qquad m(t) = 10(1 - \mathrm{e}^{-0.01t})\ (\mathrm{kg})$

$$c(t) = \frac{m(t)}{100 \times 10^6} = 10^{-7}(1 - \mathrm{e}^{-0.01t})\ (\mathrm{kg/L})$$

五、令 $\qquad f(x) = \mathrm{e}^{2x} - kx$

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - k$$

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{k}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{k}{2}\right) = \mathrm{e}^{\ln\frac{k}{2}} - \frac{k}{2}\ln\frac{k}{2}$$

$$= \frac{k}{2}\left(1 - \ln\frac{k}{2}\right) < 0$$

又 $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

故在 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{k}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{k}{2}, +\infty\right)$ 内 $f(x)$ 各有且只有一

根，即 $y=kx$ 与 $y=e^x$ 恰有两个交点.

六、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}\Big/\dfrac{1}{n^\alpha}$

$$=\lim_{n\to\infty}1\Big/\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\frac{1}{n}=\frac{1}{\int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x}$$

$$=1\Big/\frac{1}{\alpha+1}=\alpha+1$$

由于 $\alpha>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$收敛.

七、令 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则 $g(a)=g(b)=0$，又由题设有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)-f(a)(b-a)-\frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a)$$

$$=0$$

故∃ $c\in(a,b)$，使 $g(c)=0$.

连续用洛尔定理，∃ $x_0\in(a,b)$，使 $g''(x_0)=0$，即 $f''(x_0)=0$.

八、设 $\boldsymbol{l}_i=\{a_{i1},a_{i2},a_{i3}\}\quad(i=1,2,3)$

由题设有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}=\frac{\partial f}{\partial x}a_{i1}+\frac{\partial f}{\partial y}a_{i2}+\frac{\partial f}{\partial z}a_{i3}=0\qquad(i=1,2,3)$$

由于 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{l}_3$ 线性无关，故方程组的系数行列式

$$\det(a_{ij})_{3\times3}\neq0$$

故方程组只有零解，即有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$f(x,y,z)$与 x，y，z 都无关，故 $f(x)\equiv$常数.

九、(1) 由题意应有

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - (\xi - a)f(a)$$

$$= (a + h - \xi)f(a + h) - \int_{\xi}^{a+h} f(x)\mathrm{d}x$$

由此可解得

$$\xi = \frac{af(a) - (a + h)f(a + h)}{f(a) - f(a + h)} +$$

$$\frac{1}{f(a) - f(a + h)}\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x$$

故 ξ 的存在性得证.

(2) 当 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 时

$$\xi = \frac{a\mathrm{e}^a - (a + h)\mathrm{e}^{a+h}}{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{a+h}} + \frac{1}{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{a+h}}\int_a^{a+h} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a - (a + h)\mathrm{e}^h + \mathrm{e}^h - 1}{1 - \mathrm{e}^h}$$

故 $$a + \theta h = \frac{a - (a + h)\mathrm{e}^h + \mathrm{e}^h - 1}{1 - \mathrm{e}^h}$$

解得 $$\theta = \frac{(h - 1)\mathrm{e}^h + 1}{h(\mathrm{e}^h - 1)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{(h - 1)\mathrm{e}^h + 1}{h(\mathrm{e}^h - 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h - 1)\mathrm{e}^h + 1}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\mathrm{e}^h}{2h} = \frac{1}{2}$$

北京理工大学 2001 年数学竞赛试题及解析

试　　题

一、填空

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & x<-1\\ b & x=-1\\ a+\arccos x & x>-1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，则 $a=$______，$b=$______.

2. 函数 $u=\ln(x^x y^y z^z)$的全微分 $\mathrm{d}u=$__________.

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)^n$ 的收敛半径 $R=$______.

4. 已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=3$，则以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 为棱的平行六面体体积 $V=$______.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}=$__________.

6. 设 $p(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=3$，则 $p(x)=$________.

7. 以 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3x\mathrm{e}^x$ 为通解的常系数线性齐次微分方程为________.

8. 已知函数 $f(x)$满足 $xf(x)=2+\int_1^x 2f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$________.

9. 设 $f(x,y)$是连续函数，且 $f(x,y)=xy-\dfrac{1}{2}\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，则 $f(x,y)=$________.

10. 设 C：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$，则曲线积分 $\oint_C(x+y^2)\mathrm{d}l=$ ________.

二、求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}-\dfrac{4}{4n^2-1}\right)$ 的和 S.

三、计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}\mathrm{e}^{-(1-z)^2}\rho\mathrm{d}z$

四、设 L 是过点 $(1,0,0)$ 且与 z 轴平行的直线，求曲线 C：$\begin{cases}y=1-z^2\\x=0\end{cases}(-1\leqslant z\leqslant 1)$ 绕直线 L 旋转一周所得曲面与两平面 $z=-1$，$z=1$ 所围成立体的体积.

五、计算 $I=\oint_C\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的正向.

六、已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 有二阶导数，若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=1}=-y^2$，求 $f(y)$.

七、在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，一质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 (ξ,η,ζ) 处，问当 ξ，η，ζ 为何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大，并且求 W 的最大值.

八、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $0<f'(x)\leqslant 1$，$f(0)=0$，试利用变上限的积分证明 $\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^2\geqslant\int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t$.

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 及 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，$f''(\eta)=0$.

解　析

一、1. $f(-1-0)=0$，$f(-1+0)=a+\pi$，$f(-1)=b$

有 $a+\pi=b=0$

故填 $-\pi$ 与 0

2. $u=x\ln x+y\ln y+z\ln z$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\ln x+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\ln y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\ln z+1$$

故填 $(\ln x+1)\mathrm{d}x+(\ln y+1)\mathrm{d}y+(\ln z+1)\mathrm{d}z$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$

由 $-1<\frac{3x+1}{2}<1$ 得 $-1<x<\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}-(-1)=\frac{4}{3},\quad R=\frac{2}{3}$$

故填 $\frac{2}{3}$

4. $((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}))\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=0$

故填 0.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2/2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x-e^x)=-1$

故填 -1

6. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)-2x^3}{x^2}=1$

故 $p(x)=2x^3+x^2+Ax+B$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+x+A+\frac{B}{x}\right)=3$

有 $B=0,\ A=3$

故填 $2x^3+x^2+3x$

7. 由通解表示式可知 $r=0$ 是特征根，$r=1$ 是二重特征根，故特征方程为

$$r(r-1)^2=0$$

即 $$r^3-2r^2+r=0$$

故填 $y'''-2y''+y'=0$

8. 方程两边对 x 求导

$$f(x)+xf'(x)=2f(x)$$

$$xf'(x)=f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|f(x)|=\ln|x|+C_1,\quad f(x)=Cx$$

由 $f(1)=2$，得 $C=2$，$f(x)=2x$.

故填 $2x$

9. 设 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，则有

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{2}A$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(xy+\frac{1}{2}A\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即 $$A=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy\mathrm{d}y+\frac{1}{2}A=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}A$$

$$A=\frac{1}{2}$$

$$f(x,y)=xy+\frac{1}{2}A=xy+\frac{1}{4}$$

故填 $xy+\frac{1}{4}$

10. $\oint_C(x+y^2)\mathrm{d}l$

$$=\frac{1}{3}\oint_C(x+y+z)\mathrm{d}l+\frac{1}{3}\oint_C(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l$$

$$=\frac{1}{3}\oint_C 0\mathrm{d}l+\frac{1}{3}\oint_C\mathrm{d}l=\frac{2\pi}{3}$$

故填$\frac{2\pi}{3}$

二、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=2$$

$$S=1+\frac{1}{4}-2=-\frac{3}{4}$$

三、$I=\int_0^1 e^{-(1-z)^2}dz\iint\limits_{D_z}dxdy$

$$=\int_0^1 e^{-(1-z)^2}\pi(1-z)dz$$

$$\xlongequal{令 t=1-z}\pi\int_0^1 te^{-t^2}dt=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

四、设$P(0,1-z^2,z)$是曲线C上任一点，P到直线L的距离为

$$d(z)=\sqrt{1+(1-z^2)^2+(z-z)^2}=\sqrt{z^4-2z^2+2}$$

旋转体水平截面面积

$$A(z)=\pi d^2(z)=\pi(z^4-2z^2+2)$$

$$V=\int_{-1}^{1}A(z)dz=\int_{-1}^{1}\pi(z^4-2z^2+2)dz=\frac{46}{15}\pi$$

五、$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial X}{\partial y}$

取 C_1：$(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$ （ϵ 是较小正数）

设 C_1 所围区域为 D，则

$$I=\oint_{C_1}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_1}y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$$

六、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)+2f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{2x}{y^2}f''\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-yf''(y)-\dfrac{2}{y^2}f''\left(\dfrac{1}{y}\right)=-y^2$

$$y^3f''(y)+2f''\left(\frac{1}{y}\right)=y^4 \qquad (1)$$

用 $\dfrac{1}{y}$ 替换 y 得

$$f''\left(\frac{1}{y}\right)+2y^3f''(y)=\frac{1}{y} \qquad (2)$$

由(1)、(2)得

$$f''(y)=\frac{2}{3y^4}-\frac{y}{3}$$

$$f'(y)=-\frac{2}{9y^3}-\frac{y^2}{6}+C_1$$

$$f(y)=\frac{1}{9y^2}-\frac{y^3}{18}+C_1y+C_2$$

七、原点到(ξ,η,ζ)的直线方程为

L：$x=\xi t$，$y=\eta t$，$z=\zeta t$

$$W=\int_L yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^1\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta$$

由题设有

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

令
$$G=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} G'_\xi=\eta\zeta+\dfrac{2\lambda\xi}{a^2}=0 \\ G'_\eta=\xi\zeta+\dfrac{2\lambda\eta}{b^2}=0 \\ G'_\zeta=\xi\eta+\dfrac{2\lambda\rho}{c^2}=0 \\ \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

解得
$$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad \eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad \zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

由问题的实际意义，W 确有最大值，故当 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$\eta=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$\zeta=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$时，$W$ 最大，且 $W_{\max}=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$.

八、设 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t \quad (x\geqslant 0)$

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)$$
$$=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

令
$$G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$$
$$G'(x)=2f(x)(1-f'(x))$$

由于 $0<f'(x)\leqslant 1$，故

$$f(x)>f(0)=0$$

因此
$$G'(x)\geqslant 0,\quad G(x)\geqslant G(0)=0$$

故 $$F'(x) \geqslant 0, \quad F(x) \geqslant F(0) = 0$$

即 $$\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

令 $x=1$，有

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t$$

九、不妨设 $f'(a)>0$，$f'(b)>0$. 由于

$$f(a) = f(b) = 0$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x-a} = f'(a) > 0$$

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{x-b} = f'(b) > 0$$

故在 $x=a$ 的右邻域及 $x=b$ 的左邻域内分别存在 a_1，$b_1(a_1<b_1)$，使

$$\frac{f(a_1)}{a_1-a} > 0, \quad \frac{f(b_1)}{b_1-b} > 0$$

故有 $f(a_1)>0$，$f(b_1)<0$

根据介值定理，$\exists\ \xi\in(a_1,b_1)\subset(a,b)$，使

$$f(\xi) = 0$$

根据洛尔定理，$\exists\ \xi_1\in(a,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,b)$，使

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

故$\exists\ \eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使

$$f''(\eta) = 0$$

模拟竞赛试题一及解析

试　　题

一、填空

1. 设 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$，则 $f(x)$ 导数不存在的点有________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$________.

3. 若 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，其中 $f'(x)$ 是连续函数，则 $f'(0)=$________.

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)=$________.

5. $\oint_L (\mathrm{e}^x+x^2y^2z^3)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^y-y^2z)\mathrm{d}y+(\mathrm{e}^z+yz^2)\mathrm{d}z=$________，其中 L 是圆周 $\begin{cases}y^2+z^2=R^2\\ x=0\end{cases}$，如果从 x 轴正向看去，曲线为逆时针方向.

6. $\int_2^3 \min\{|x|,x^2\}\mathrm{d}x=$________.

7. 以四个函数 e^x，$2x\mathrm{e}^x$，$3\cos 3x$，$4\sin 3x$ 为解的 4 阶常系数线性齐次微分方程是________，该方程的通解是________.

8. 已知 $f(u)$ 是连续函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x=$________.

9. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

10. 枯死的树叶在森林中以每年 3 g/cm^2 的速率聚集在地面

上，同时这些枯叶又以每年75%的比率腐烂，则枯叶总质量（每平方厘米上）随时间变化的函数关系是________，其平衡值（时间 $t\to+\infty$）是________.

二、设 $x_n=\frac{n}{n^2+n+1}+\frac{n}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+nn+n}$，$n=1,2,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

三、若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f(0)=1$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 的敛散性.

四、设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

求 $Q(x,y)$.

五、判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}(p>0)$ 的敛散性.

六、某条抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0)$ 点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$，$y\geqslant 0$ 时，又知它和直线 $x=1$，$y=0$ 所围成图形的面积是 $\frac{4}{9}$. 试确定 a，b，c 的值，使这个图形绕 Ox 轴旋转而成的体积最小.

七、设 $f(x)$ 的导函数在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

八、设 $f(x)$ 可导，证明在 $f(x)$ 的两个零点之间一定存在 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

九、设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的二元函数，$f(0,0)=0$，且在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微，求

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-x^4/4}}.$$

解　　析

一、1. $f(x)=(x-2)(x+1)|x(x+1)(x-1)|$

故在 $x=0$，±1 处导数可能不存在.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(x-2)(x+1)(1-x^2)\frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)x(x+1)^2\frac{|x-1|}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)|x(x+1)(x-1)|=0$$

故填 $x=0$，$x=1$

2. $$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

故填 1

3. $$F(x)=x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f'(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

由 $$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}2f'(x)=2f'(0)=1$$

得 $$f'(0)=\frac{1}{2}$$

故填 $\frac{1}{2}$

4. 设 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A$$

已知等式两边积分得

$$A = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + A\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} xy\mathrm{d}y + A\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{12} + \frac{A}{3}$$

解得 $$A = \frac{1}{8}$$

故填 $xy + \frac{1}{8}$

5. 设 S 是 L 围成的圆的前侧，在曲线 L 上，$x=0$，利用斯托克斯公式得

$$原式 = \oint_L (\mathrm{e}^y - y^2z)\mathrm{d}y + (\mathrm{e}^z + yz^2)\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_S (y^2 + z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{yz}} (y^2 + z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

故填 $\frac{\pi R^4}{2}$

6. $$原式 = \int_{-2}^{-1}|x|\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \int_1^3 |x|\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{-1}(-x)\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \int_1^3 x\mathrm{d}x = \frac{37}{6}$$

故填 $\frac{37}{6}$

7. 特征方程有二重特征根 $r=1$，有共轭复根 $r=\pm 3\mathrm{i}$，特征方程为

$$(r-1)^2(r^2+9) = 0$$

即 $$r^4 - 2r^3 + 10r^2 - 18r + 9 = 0$$

故微分方程为

$$y^{(4)}-2y^{(3)}+10y''-18y'+9y=0$$

通解为 $$y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$$

8. $$\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}x \xlongequal{令 u=x-y} \int_{-y}^{0} f(u)\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}x=-f(-y)(-1)=f(-y)$$

故应填 $f(-y)$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}$ 的收敛半径一样，都是 3，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}$ 的收敛区间是$(-3,3)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$的收敛区间为$(-2,4)$.

故填$(-2,4)$

10. 设 t 时刻枯叶质量为 $m=m(t)$.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=3-0.75\,m\\ m|_{t=0}=0\end{cases}$$

解得 $$m=4(1-e^{-0.75t})$$

$$\lim_{t\to+\infty}m=4$$

故分别填 $4(1-e^{-0.75t})$和 4

二、$$x_n<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=y_n$$

$$x_n>\frac{n}{n^2+n+n}+\frac{n}{n^2+2n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+nn+n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+1}>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k+1}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n+k}=y_n-\frac{1}{n+1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln 2$

三、由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数，有 $f'(0)=0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| \Big/ \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f''(0)}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big/\frac{1}{n^2}\right|$$

$$= \frac{|f''(0)|}{2}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 收敛.

四、由题意有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

故 $$Q(x,y) = x^2 + c(y)$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^t 0\mathrm{d}x + \int_0^1 (t^2 + c(y))\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 c(y)\mathrm{d}y$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^t (1 + c(y))\mathrm{d}y = t + \int_0^t c(y)\mathrm{d}y$$

由已知条件得

$$t^2 + \int_0^1 c(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t c(y)\mathrm{d}y$$

两边对 t 求导

$$2t = 1 + c(t),\quad c(t) = 2t - 1$$

故 $$Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$$

五、根据麦克劳林公式

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{-p}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\left[1-p\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\frac{p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ 绝对收敛；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛；当 $p>1$ 时绝对收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛；当 $p>1$ 时绝对收敛.

六、曲线过(0,0)，故 $c=0$. 由

$$A=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$$

得

$$b=2\left(\frac{4}{9}-\frac{a}{3}\right)$$

$$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{2}{135}a^2+\frac{4}{81}a\right)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left(\frac{4a}{135}+\frac{4}{81}\right)=0$$

得

$$a=-\frac{5}{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}=\frac{4\pi}{135}>0$$

故 $V\left(-\frac{5}{3}\right)$ 为最小值. 此时

$$b=2\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)\right)=2$$

因此 $$a=-\frac{5}{3},\quad b=2,\quad c=0$$

七、根据柯西不等式

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^x 1^2\mathrm{d}x\int_a^x(f'(x))^2\mathrm{d}x$$
$$=(x-a)\int_a^x(f'(x))^2\mathrm{d}x\leqslant(x-a)\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\left[(x-a)\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b(f'(x)^2)\mathrm{d}x$$

八、由于$(f(x)\mathrm{e}^x)'=(f(x)+f'(x))\mathrm{e}^x$，令

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$$

则$F(x)$可导. 设x_1，$x_2(x_1<x_2)$是$f(x)$的任意两个零点，则

$$F(x_1)=F(x_2)=0$$

由洛尔定理，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使$F'(\xi)=0$，即

$$(f(\xi)+f'(\xi))\mathrm{e}^\xi=0$$

由$\mathrm{e}^\xi\neq0$，有

$$f(\xi)+f'(\xi)=0$$

故得证.

九、交换积分次序，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^{-x^4/4}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f(t,u)\mathrm{d}u}{x^4/4}$$

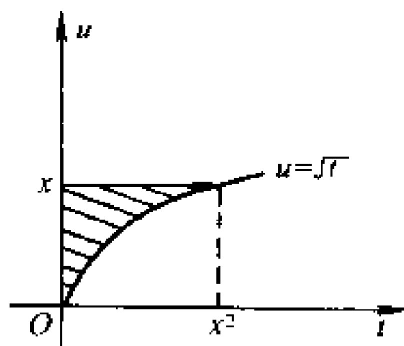


图 84

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\int_0^x \mathrm{d}u \int_0^{u^2} f(t,u)\mathrm{d}t}{x^4/4} \quad \text{（利用洛必达法则）}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\int_0^{x^2} f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3} \quad \text{（利用积分中值定理）}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-f(\xi,x)x^2}{x^3} \qquad (\xi \in (0,x^2))$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(0,0) + f'_x(0,0)\xi + f'_y(0,0)x + o\left(\sqrt{x^2+\xi^2}\right)}{-x}$$

$$= -f'_y(0,0)$$

其中
$$\left|\frac{f'_x(0,0)\xi}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f'_x(0,0)x^2}{x}\right| = |f'_x(0,0)x|$$

故
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'_x(0,0)\xi}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{o\left(\sqrt{x^2+\xi^2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{o(x)}{x} = 0$$

模拟竞赛试题二及解析

试　　题

一、填空

1. 设 α 是任意正实数，$f(x)=(x^{1/x}-1)x^{\alpha}$，则当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的________无穷小.

2. 已知 $w=f(x-y\cdot y-z,t-z)$，则 $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=$________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-x} & x>0\end{cases}$，则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}=$________.

5. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$______.

6. $\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x=$________.

7. 设 S 是八面体 $|x|+|y|+|z|\leqslant 1$ 的表面，则 $\iint\limits_S(x-2y+4z+5)^2\mathrm{d}S=$__________.

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数为__________.

9. 微分方程 $(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$ 的通解为__________.

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $tf(t)=1+\int_0^t s^2f(s)\mathrm{d}s$，则 $f(x)=$________.

二、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，又 $f(0)=0$，求证：对任意 $x_1>0$，$x_2>0$，

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

三、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，且 $f'(x)\geqslant k>0$，$f(0)<0$．求证：在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ 有且仅有一个零点．

四、设 $1<x_1<2$，$7x_{n+1}=x_n^3+6(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

五、设 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在闭区域 D：$x^2+y^2\leqslant 1$ 具有一阶连续偏导数，又

$$f(x,y)=v\boldsymbol{i}+u\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$$

在 D 的边界上有 $u(x,y)=1,v(x,y)=y$，求积分 $\iint\limits_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\mathrm{d}\sigma$ 的值．

六、求 $G(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 点展开的幂级数．

七、旋转体的容器应是什么形状，才能使液体流出时液体的表面的下降是均匀的（液体流速为 $v=c\sqrt{2gy}$，c 为常数，y 为液体深度）．

八、曲面 $z=13-x^2-y^2$ 将球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 分成三部分，求这三部分曲面的面积之比．

九、求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和．

解　　析

一、1．$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Big/\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{1/x}-1)x^{-a}\Big/\dfrac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)x^{1-a}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot x^{1-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0$$

故应填高阶

2．$\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial t}$

$=f_1'+[f_1'\cdot(-1)+f_2']+[f_2'\cdot(-1)+f_3'\cdot(-1)]+f_3'=0$

故填 0

3. $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x \qquad (令\ t=x-2)$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(1+x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{3} - \mathrm{e}$$

故填$\frac{8}{3}-\mathrm{e}$

4. 设$a_n=\frac{2^n \cdot n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，因此$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

故填 0

5. $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t \qquad (令\ u=x^2-t^2)$

$$=-\int_{x^2}^{0}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x$$

故填 $xf(x^2)$

6. 令 $t=\ln\frac{1}{x}$，即 $x=\mathrm{e}^{-t}$.

$$\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{1}{x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=2n\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=4n$$

故填 $4n$

7. 设$S_1:x+y+z=1$，由于S关于各坐标面都是对称的，故有

$$\oiint_S (x+2y+4z+5)^2 \mathrm{d}S$$

$$= \oiint_S (x^2+4y^2+16z^2+25)\mathrm{d}S \quad \text{（其他项积分为零）}$$

$$= 21\oiint_S x^2 \mathrm{d}S + 25\oiint_S \mathrm{d}S$$

$$= 8\left(21\iint_{S_1} x^2 \mathrm{d}S + 25\iint_{S_1} \mathrm{d}S\right)$$

$$= 8\times 21\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} x^2\sqrt{3}\,\mathrm{d}y + 8\times 25\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\sqrt{3}\,\mathrm{d}y$$

$$= 114\sqrt{3}$$

故填 $114\sqrt{3}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n\right)'$

$$= \left(x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)' = \left(x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)'$$

$$= \left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

故填 $\frac{1+x}{(1-x)^3}$

9. 由观察，$y=x$ 是方程的一个解，记 $y_1(x)=x$，方程的另一与 $y_1(x)$ 线性无关的解为

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$= x\int \frac{\mathrm{e}^{-\int -\frac{x}{x^2\ln x}\mathrm{d}x}}{x^2}\mathrm{d}x = x\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln x - 1 \qquad \text{（取常数 } C \text{ 为 0）}$$

方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2(-\ln x - 1)$$

故填 $y=C_1x+C_2(\ln x-1)$

10. 方程两边对 t 求导

$$f(t)+tf'(t)=t^2f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)}=\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$\ln|f(t)|=\frac{t^2}{2}-\ln|t|+C_1$$

$$f(t)=C\frac{\mathrm{e}^{t^2/2}}{t}$$

代入已知方程得

$$C\mathrm{e}^{t^2/2}=1+C\mathrm{e}^{t^2/2}-C$$

故 $C=1$， $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{t^2/2}}{t}$

故填 $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2/2}}{x}$

二、令 $F(x)=f(x+x_1)-f(x)-f(x_1)$

$$F'(x)=f'(x+x_1)-f'(x)$$
$$=f''(\xi)x_1\leqslant 0 \qquad \xi\in(x,x+x_1)$$

故 $F(x)$ 单调减少，又

$$F(0)=f(x_1)-f(0)-f(x_1)=0$$

故当 $x>0$，$F(x)\leqslant 0$

即 $\qquad f(x+x_1)\leqslant f(x)+f(x_1)$

因此 $\qquad f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$

三、因为 $f'(x)\geqslant k>0$，根据拉格朗日中值公式，存在 $\xi\in(0,x)$，使

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)x\geqslant f(0)+kx$$

令 $f(0)+kx>0$，得 $x>-\dfrac{f(0)}{k}$，故当 $x>-\dfrac{f(0)}{k}$ 时有 $f(x)>0$，又 $f(0)<0$，根据介值定理，存在 $c\in\left(0,-\dfrac{f(0)}{k}+1\right)\subset(0,+\infty)$，使

$$f(c)=0$$

即 $f(x)$在$(0,+\infty)$有零点.

由于 $f'(x)>0$，$f(x)$单调，故零点惟一.

四、$x_2-x_1=\frac{1}{7}(x_1^3+6)-x_1$

$$=\frac{1}{7}(x_1^3-7x_1+6)$$

$$=\frac{1}{7}(x_1+3)(x_1-1)(x_1-2)<0$$

设 $x_n-x_{n-1}<0$，且由已知条件，显然 $x_n>0$，则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{7}(x_n^3+6-x_{n-1}^3-6)$$

$$=\frac{1}{7}(x_n^3-x_{n-1}^3)<0$$

故$\{x_n\}$单调减少.

又 $x_1>1$，$x_2=\frac{1}{7}(x_1^3+6)>\frac{1}{7}(1+6)=1$

设 $x_n>1$，则

$$x_{n+1}=\frac{1}{7}(x_n^3+6)>1$$

故$\{x_n\}$有下界. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

由 $7x_{n+1}=x_n^3+6$，令 $n\to\infty$，得

$$7A=A^3+6$$

解得 $A=1$ ($A=-3$，2 舍去)，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

五、设 D 的边界曲线为 C.

$$\iint_D f\cdot \mathbf{g}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oint_C uv(dx + dy) = \oint_C y(dx + dy)$$

$$= \iint_D (-1)dxdy = -\pi$$

六、$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} - 1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{(2n)!}x^{2n-2}$$

七、设 t 时刻液面高度为 y，而容器是由曲线 $y=f(x)$绕 y 轴旋转面成，在时间$[t,t+dt]$内液面下降 dy，流出的水量为

$$\pi x^2 dy = vdt = c\sqrt{2gy}dt$$

$$c\sqrt{2gy} = \pi x^2\frac{dy}{dt}$$

由题意

$$\frac{dy}{dt} = c_1 \qquad (c_1 \text{是常数})$$

故

$$c\sqrt{2gy} = \pi x^2 c_1$$

$$y = \frac{\pi^2 c_1^2}{2gc^2}x^4$$

旋转曲面的方程为

$$y = \frac{\pi^2 c_1^2}{2gc^2}(x^2 + z^2)^2$$

八、两曲面的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = -3 \end{cases}$$

由 $x^2+y^2+z^2=25$ 得

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

如图 85，设三部分曲面面积分别为 A_1，A_2，A_3，则

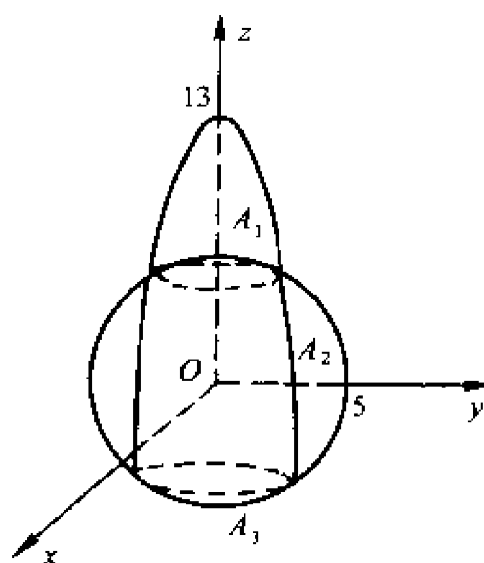


图 85

$$A_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\frac{5\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=10\pi$$

$$A_3=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 16}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\frac{5\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=20\pi$$

$$A_2=4\pi\cdot 5^2-A_1-A_3=70\pi$$

故
$$A_1:A_2:A_3=1:7:2$$

九、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n)!}{(4n+4)!}=0$

收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

$$S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$$

$$S^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=S(x)$$

$$\begin{cases}S^{(4)}(x)-S(x)=0\\ S(0)=1,S'(0)=S''(0)=S'''(0)=0\end{cases}$$

$$r^4-1=0$$

解得 $r=\pm 1$，$\pm i$

方程的通解为

$$S(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

由初始条件得

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=1\\C_1-C_2+C_4=0\\C_1+C_2-C_3=0\\C_1-C_2-C_4=0\end{cases}$$

解得　$C_1=C_2=\dfrac{1}{4}$，$C_3=\dfrac{1}{2}$，$C_4=0$

故　$S(x)=\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})+\dfrac{1}{2}\cos x$

模拟竞赛试题三及解析

试　　题

一、填空

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$________.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$，当 x ________时，级数收敛；当 x ________时，级数绝对收敛.

3. 设 C 是从点 $O(0,0)$ 到点 $M(1,3)$ 的任一光滑曲线段，$f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导数，且满足 $\int_0^{2x+3y+1}f(t)\mathrm{d}t=4x^2+9y^2+12xy-2$，则 $f(t)=$______，曲线积分 $I=\int_C f(2x+3y+1)(2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y)=$______.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 满足条件：$f(x)>0$，$f''(x)<0$，$f(0)=1$，又 $f(x)$ 与过 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 的水平直线及 y 轴所围图形面积为 $\frac{2}{3}x^3$，则 $f(x)=$______.

5. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{2\ln u}{u+1}\mathrm{d}u$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=$____.

6. 已知方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 有特解 $y=\frac{x}{\ln|x|}$，则 $\varphi(x)=$____.

7. 设 $f(x)$ 连续，a 为正常数，则初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x)\\ y|_{x=0}=0\end{cases}$ 的解 $y=$______.

8. 一半径为 a 的轮子沿 x 轴向右方作无滑动的滚动，设轮子中心以匀速 v 运动，$M(x,y)$ 是轮子边缘上一定点，且 $t=0$ 时 M

在原点，则 x 与 y 的速率$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=$______，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=$______.

9. 设 $f'(\mathrm{e}^x)=a\sin x+b\cos x$（$a,b$ 是不同时为零的常数），则 $f(x)=$______.

10. 设 $u=xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$，则$\frac{\partial^9 u}{\partial x^2\partial y^3\partial z^4}=$______.

二、设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，求证：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使得

$$2f'(\xi)=(1-\xi)f''(\xi)$$

三、已知函数 $y=f(x)$对一切 x 满足

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$$

且在点 $x_0\neq 0$ 处取得极值，问 $f(x_0)$是极大值还是极小值，并证明你的结论.

四、计算积分

$$I=\iint_S yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2y^2-2xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是曲面 $z=2(1-x^2-y^2)$（$z\geqslant 0$）的上侧.

五、设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，考虑积分 $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$，证明：

（1）存在 $\xi\in[0,1]$，使 $|f(\xi)|\geqslant 4$；

（2）存在 $\xi\in[0,1]$，使 $|f(\xi)|=4$.

六、（1）设 $u=u(x,y,z)$，若 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$，试证明在球坐标下 u 仅为 θ，φ的函数；

（2）设 $z=z(x,y)$，若$\frac{z'_x}{x}=\frac{z'_y}{y}$，试证明 z 仅为 r 的函数，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

七、求 $\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\dfrac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\dfrac{1}{3!}+\dfrac{\pi^4}{7!}+\dfrac{\pi^8}{11!}+\dfrac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$ 的值.

八、雨水从屋檐上滴入下面的一圆柱形水桶中，当下雨停止时，桶中雨水以与水深的平方根成正比的速率向桶外渗漏，如果水面高度在 1 h 内由开始的 90 cm 减少至 88 cm，问需要多少时间桶内的水全部渗漏掉.

九、证明 $\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$

解　　析

一、1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times 3}{2^2}\,\dfrac{2\times 4}{3^2}\,\dfrac{3\times 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}$

故填 $\dfrac{1}{2}$

2. 当 $x>0$，$u_n(x)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\left|\dfrac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}\right|$ 单调减少趋于零，故此时级数收敛.

当 $x\leqslant 0$，$u_n(x)\not\to 0$，级数发散.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n(x)}{1/n^{2x}}=1$，而当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}u_n(x)$ 收敛，即级数绝对收敛.

故分别填 $x>0$，$x>\dfrac{1}{2}$

3. 等式两边对 x 求偏导

$f(2x+3y+1)\cdot 2 = 8x+12y = 4(2x+3y+1)-4$

故　$f(t)=2t-2$

$$I=\int_C f(2x+3y+1)\mathrm{d}(2x+3y+1) \quad (令 t=2x+3y+1)$$

$$=\int_1^{12} f(t)\mathrm{d}t=\int_1^{12}(2t-2)\mathrm{d}t=121$$

故分别填 $2t-2$ 和 121

4. 由题意

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=\frac{2}{3}x^3$$

两边对 x 求导得

$$f'(x)=-2x$$

$$f(x)=-x^2+C$$

由 $f(0)=1$，得 $C=1$，$f(x)=-x^2+1$

故填 $1-x^2$

5. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=\int_1^x \frac{2\ln u}{u+1}\mathrm{d}u+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{2\ln u}{u+1}\mathrm{d}u \quad \left(第二个积分令 t=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\int_1^x \frac{2\ln u}{u+1}\mathrm{d}u+\int_1^x \frac{2\ln t}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^x \frac{2\ln u}{u+1}\mathrm{d}u+\int_1^x \frac{2\ln u}{u(u+1)}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x \frac{2\ln u}{u}\mathrm{d}u=\ln^2 x$$

故填 $\ln^2 x$

6. 将 $y=\frac{x}{\ln|x|}$ 代入方程，得

$$\frac{\ln|x|-1}{\ln^2|x|}=\frac{1}{\ln|x|}+\varphi(\ln|x|)$$

$$\varphi(\ln|x|)=-\frac{1}{\ln^2|x|}, \quad \varphi(x)=-\frac{1}{x^2}$$

故填 $-\frac{1}{x^2}$

7. $y=\mathrm{e}^{-\int_0^x a\mathrm{d}x}\left[C+\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$

$$=\mathrm{e}^{-ax}[C+\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x]$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C=0$.

故填 $\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

8. 由题意，$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，其中 θ 是轮子转过的角度.

因为轮子中心以匀速运动，故 θ 也以匀速运动，且$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{a}$，故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(1-\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(1-\cos\theta)v$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=v\sin\theta$$

故分别填$(1-\cos\theta)v$ 与 $v\sin\theta$

9. $f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x=a\mathrm{e}^x\sin x+b\mathrm{e}^x\cos x$

积分得 $\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(a\mathrm{e}^x\sin x+b\mathrm{e}^x\cos x)\mathrm{d}x$

即 $$f(\mathrm{e}^x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2}[(a+b)\sin x+(b-a)\cos x]+C$$

故填$\frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln t)+(b-a)\cos(\ln t)]+C$

10. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{x+y+z}+xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$

$$=(1+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(2+x)yz\mathrm{e}^{x+y+z}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=(2+x)(1+y)z\mathrm{e}^{x+y+z}$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^3}=(2+x)(3+y)z\mathrm{e}^{x-y+z}$$

$$\frac{\partial^9 u}{\partial x^2\partial y^3\partial z^4}=(2+x)(3+y)(4+z)\mathrm{e}^{x+y+z}$$

故填$(2+x)(3+y)(4+z)e^{x+y+z}$

二、令$F(x)=(1-x)^2f'(x)$，则$F(x)$连续，由于$f(0)=f(1)$，故$\exists\ c\in(0,1)$，使

$$f'(c)=0$$

故$F(1)=F(c)=0$，因此$\exists\ \xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使

$$F'(\xi)=0$$

即
$$(1-\xi)^2f''(\xi)-2(1-\xi)f'(\xi)=0$$

故
$$2f'(\xi)=(1-\xi)f''(\xi)$$

三、将x_0代入方程，并利用$f'(x_0)=0$，得

$x_0f''(x_0)=1-e^{-x_0}$

当$x_0>0,1-e^{-x_0}>0$,有$f''(x_0)>0$

当$x_0<0,1-e^{-x_0}<0$,有$f''(x_0)>0$

故$f(x_0)$是极小值.

四、设S_1为$x^2+y^2+z^2=1\quad(z\geqslant 0)$的下侧，$S_2$为$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ z=0\end{cases}$的上侧，$S$与$S_1$所围区域为$V$，$S_1$与$S_2$所围区域为$V_1$，则

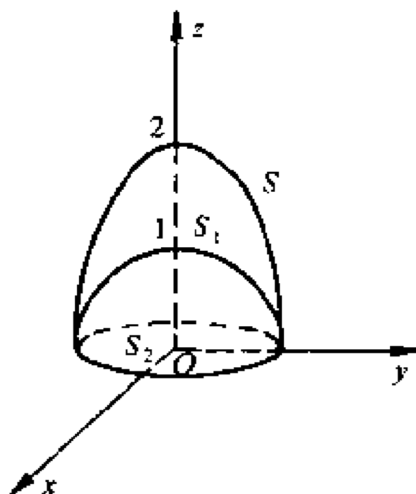


图 86

$$I=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$$
$$xz\sqrt{x^2-y^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+$$
$$\left(x^2y^2-2xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2y^2-2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\oiint\limits_{S_1+S_2}+\iint\limits_{S_2}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2y^2-2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{V_1} 0\mathrm{d}V + \iint_{S_2}(x^2y^2 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2y^2 - 2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^5\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{24}$$

五、(1) 利用广义积分中值定理，∃ $\xi\in[0,1]$，使

$$1 = \left|\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\int_0^1\left(x - \frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_0^1\left|x - \frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= |f(\xi)|\int_0^1\left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$= |f(\xi)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= |f(\xi)|\frac{1}{4}$$

因此 $|f(\xi)|\geqslant 4$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上连续，由 (1)，∃ $\xi_1\in[0,1]$，使

$$|f(\xi_1)|\geqslant 4$$

根据积分中值定理，∃ $\xi_2\in[0,1]$，使

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_2)$$

故 $|f(\xi_2)|=0$. 因此根据介值定理，在 ξ_1 与 ξ_2 之间存在 ξ，使

$$|f(\xi)|=4,\quad \xi\in[0,1]$$

六、(1) 由于

$$u = u(x,y,z) = u(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

故 u 仅为 θ，φ 的函数.

(2) 由于

$$z = z(x,y) = z(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}r(-\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

$$= -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

故 z 仅为 r 的函数.

七、设分子为 p，分母为 q，则有

$$\pi p - \pi^3 q$$

$$= \pi + \frac{\pi^5}{5\,!} + \frac{\pi^9}{9\,!} + \cdots - \frac{\pi^3}{3\,!} - \frac{\pi^7}{7\,!} - \frac{\pi^{11}}{11\,!} - \cdots$$

$$= \sin\pi = 0$$

故　原式 $= \dfrac{p}{q} = \pi^2$

八、设 t 时刻水面高度为 $y = y(t)$，水桶半径 r 为常数，水桶内水的体积为 $\pi r^2 y$，由题意，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r^2 y) = -k_1\sqrt{y} \qquad (k_1 > 0)$$

即

$$\pi r^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{y} \qquad \left(记\ k = \frac{k_1}{\pi r^2}\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{y}\\ y|_{t=0} = 90\end{cases}$$

解得

$$\sqrt{y} = -\frac{k}{2}t + C$$

由 $y|_{t=0}=90$，得 $C=\sqrt{90}$.

$$\sqrt{y}=-\frac{k}{2}t+\sqrt{90}$$

由 $y|_{t=1}=88$，得

$$k=2(\sqrt{90}-\sqrt{88})$$

故有 $$\sqrt{y}=(\sqrt{88}-\sqrt{90})t+\sqrt{90}$$

令 $y=0$，得

$$t=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{90}-\sqrt{88}}\approx 89.5\ \mathrm{h}$$

故约 89.5 h 桶内的水全部渗漏掉.

九、$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\left(1+x\ln x+\frac{1}{2\,!}x^2\ln^2 x+\frac{1}{3\,!}x^3\ln^3 x+\cdots+\frac{1}{n\,!}x^n\ln^n x+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[x+\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2\,!\,3}x^3\ln^2 x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}\right)+\left(\frac{x^4}{3\,!\,4}\ln^3 x-\frac{x^4}{2\,!\,4^2}\ln^2 x+\frac{x^4}{4^3}\ln x-\frac{x^4}{4^4}\right)+\cdots+\left(\frac{x^{n+1}}{n\,!\,(n+1)}\ln^n x-\frac{x^{n+1}}{(n-1)\,!\,(n+1)^2}\ln^{n-1}x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{(n+1)^n}\ln x+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)+\cdots\right]\Bigg|_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

模拟竞赛试题四及解析

试　　题

一、填空

1. 已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{e^{f(x)}-1}=2$，则 $f(0)=$ ________，$f'(0)=$ ________.

2. 设 $y=x^2e^x$，则 $y^{(2000)}(0)=$ ________.

3. 某函数的全微分为 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$，则 $a=$ ________.

4. 已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$ ________.

5. 设 $\int_x^{2\ln 2}\dfrac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$，则 $x=$ ________.

6. 已知 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_L x^2ds=$ ________.

7. 函数 $u=u(x,y)$ 是方程 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 的解，C 是平面上的光滑曲线，则曲线积分 $\oint_C u'_y dx+\dfrac{1}{a^2}u'_x dy=$ ________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt=$ ________.

9. 微分方程 $(1+y^2)dx+(x-\arctan y)dy=0$ 的通解为 ________.

10. 函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，并有 $\int_0^1\varphi(tx)dt=a\varphi(x)$，其中 a 为常数，且 $a\neq 0$，$a\neq 1$，则 $\varphi(x)=$ ________.

二、设 $b>a>1$，求证 $be^a-ae^b<b-a$.

三、设 $a_k(k=1,2,\cdots,1999)$ 是给定的正数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+2a_2^n+$

$\cdots+1999a_{1999}^{n})^{\frac{1}{n}}$.

四、求曲线 $y=2e^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 Ox 轴所围成的图形的面积.

五、设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f，φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

六、设曲线 L 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$，$M(\rho,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点，若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积等于 L 上两点 M_0,M 间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

七、一飞机在离地面 2 km 的高度，以 200 km/h 的速度飞临某目标的上空以便进行航空摄影，试求飞机飞至该目标上方时摄像机转动的速度.

八、设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

九、设函数 $f(x)$ 在实轴 **R** 上可微，且 $f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant p|f(x)|$，其中 $0<p<1$，证明 $f(x)\equiv 0$.

解　　析

一、1. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{e^{f(x)}-1}=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0$

得 $$\lim_{x\to 0}(e^{f(x)}-1)=0$$

故 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{\arctan x}=\frac{1}{2}$$

故分别填 0 和 $\frac{1}{2}$

2. $y=x^2e^x=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$

x^{2000}的系数 $a_{2000}=\frac{1}{1998!}$，故

$$y^{2000}(0)=a_{2000}\cdot 2000!=\frac{2000!}{1998!}=3998000$$

故填 3998000

3. $$X=\frac{x+ay}{(x+y)^2},\quad Y=\frac{y}{(x+y)^2}$$

由$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$，得

$$\frac{-2y}{(x+y)^3}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$$

得 $a-2=0$，$a=2$

故填 2

4. $$\begin{aligned}\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f'(2x)\\ &=\frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1\\ &=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}[f(2)-f(0)]=2\end{aligned}$$

故填 2

5. 令 $u=\sqrt{e^t-1}$

$$\begin{aligned}\int_x^{2\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}} &= \int_{\sqrt{e^x-1}}^{\sqrt{3}}\frac{2\mathrm{d}u}{u^2+1}\\ &=2\arctan u\Big|_{\sqrt{e^x-1}}^{\sqrt{3}}\\ &=2\arctan\sqrt{3}-2\arctan\sqrt{e^x-1}\\ &=2\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\sqrt{e^x-1}\right)=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

解得 $x=\ln 2$

故填 ln2

6. $$\oint_L x^2 ds = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L a^2 ds = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

故填$\frac{2}{3}\pi a^3$

7. $$\oint_C u'_y dx + \frac{1}{a^2}u'_x dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{1}{a^2}u''_{x^2} - u''_{y^2}\right)dxdy = 0$$

故填 0

8. 由洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 2t)^{1/t}dt$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1+\sin 2t)^{1/t}dt}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{x}} = e^2$$

故填 e^2

9. 将方程化为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\arctan y}{1+y^2}$$

$$x = e^{-\int\frac{1}{1+y^2}dy}\left[C + \int\frac{\arctan y}{1+y^2}e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}\right]$$

$$= e^{-\arctan y}\left(C + \int \arctan y\, e^{\arctan y} d\arctan y\right)$$

$$= e^{-\arctan y}(C + \arctan y\, e^{\arctan y} - e^{\arctan y})$$

$$= \arctan y - 1 + Ce^{-\arctan y}$$

故填 $x=\arctan y-1+Ce^{-\arctan y}$

10. 令 $$u=tx$$

$$\int_0^1 \varphi(tx)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u$$

故已知方程化为

$$\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u = a\varphi(x)$$

$$\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u = ax\varphi(x)$$

两边对 x 求导

$$\varphi(x) = a\varphi(x) + ax\varphi'(x)$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1-a}{ax}$$

$$\ln|\varphi(x)| = \frac{1-a}{a}\ln|x| + C_1$$

$$\varphi(x) = Cx^{\frac{1-a}{a}}$$

故填 $Cx^{\frac{1-a}{a}}$

二、令 $$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x},\quad g(x)=\frac{1}{x}$$

由柯西中值定理，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}-\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^\xi(\xi-1)}{\xi^2}}{\dfrac{-1}{\xi^2}}$$

$$= (1-\xi)\mathrm{e}^\xi < 1$$

故 $$\frac{\mathrm{e}^a}{a}-\frac{\mathrm{e}^b}{b}<\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

由此得 $$b\mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^b < b-a$$

三、设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 1999}\{a_i\}=a_k$

$$y_n = (a_1^n + 2a_2^n + \cdots - 1999a_{1999}^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\ln y_n = \frac{1}{n}\ln(a_1^n + 2a_2^n + \cdots + 1999a_{1999}^n)$$

$$= \frac{1}{n}\ln a_k^n\left[\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + 2\left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + 1999\left(\frac{a_{1999}}{a_k}\right)^n\right]$$

$$= \ln a_k + \frac{1}{n}\ln\left[\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + 2\left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + 1999\left(\frac{a_{1999}}{a_k}\right)^n\right]$$

$$\xlongequal{\text{def}} \ln a_k + x_n$$

由于

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}\ln(1 + 2 + \cdots + 1999) = \frac{1}{n}\ln\frac{1999 \times 2000}{2}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{1999 \times 2000}{2} = 0$$

得
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n = \ln a_k$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a_k = \max_{1\leqslant i\leqslant 1999}\{a_i\}$$

四、$A = \int_0^{+\infty}|2e^{-x}\sin x|\,dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}2(-1)^k e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}2(-1)^k\frac{-e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}[e^{-(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi - e^{-k\pi}\cos k\pi]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1} - e^{-k\pi}(-1)^k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[e^{-k\pi} + e^{-(k+1)\pi}]$$

$$= (1 + e^{-\pi})\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi}$$

$$= \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}$$

五、三个方程分别对 x 求偏导

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}=f'_x+f'_y\dfrac{dy}{dx}+f'_z\dfrac{dz}{dx} & ①\\ \varphi'_1\cdot 2x+\varphi'_2\cdot e^y\dfrac{dy}{dx}+\varphi'_3\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 & ②\\ \dfrac{dy}{dx}=\cos x & ③\end{cases}$$

将③代入②解得

$$\frac{dz}{dx}=-2x\frac{\varphi'_1}{\varphi'_3}-\cos x\cdot e^y\frac{\varphi'_2}{\varphi'_3} \quad ④$$

将③、④代入①得

$$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\cdot\cos x+f'_z\cdot\left(-2x\frac{\varphi'_1}{\varphi'_3}-\cos x\cdot e^y\cdot\frac{\varphi'_2}{\varphi'_3}\right)$$

$$=f'_x+f'_y\cdot\cos x-\frac{f'_z}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\varphi'_2)$$

六、由题设，有

$$\int_0^\theta\frac{1}{2}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta$$

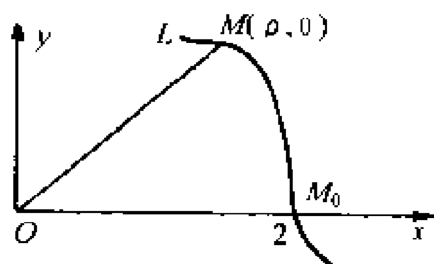


图 87

两边对 θ 求导

$$\rho^2=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}$$

$$\rho'=\pm\rho\sqrt{\rho^2-1}$$

$$\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\pm d\theta$$

$$-\arcsin\frac{1}{\rho}=\pm\theta+C$$

由 $\rho|_{\theta=0}=2$，得 $C=-\frac{\pi}{6}$.

$$-\arcsin\frac{1}{\rho}=\pm\theta-\frac{\pi}{6}$$

即
$$\rho=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)}$$

此即为曲线 L 的方程.

七、如图 88 选取坐标系，其中目标取为坐标原点. 记飞机与目标的水平距离为 x，摄像机角度为 θ，则有

$$\tan\theta = \frac{2}{x}$$

$$\theta = \arctan\frac{2}{x}$$

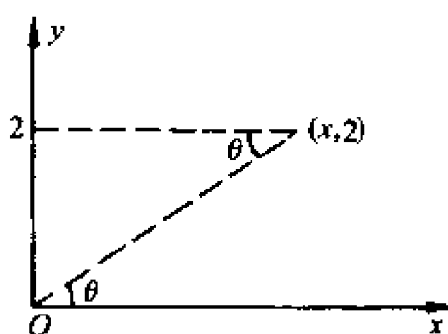


图 88

两边对 t 求导

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2+4}\frac{dx}{dt}$$

将 $x=0$，$\frac{dx}{dt}=-200$ 代入得

$$\frac{d\theta}{dt} = 100 \text{ (rad/h)}$$

$$= 100\times\frac{180}{\pi}\times\frac{1}{3600} \quad ((°)/s)$$

$$= \frac{5}{\pi} \quad ((°)/s)$$

八、由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，得

$$f(0) = \lim_{x\to0}f(x) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 0$$

故在 $x=0$ 的某邻域内

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$$= \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\Big/\frac{1}{n^2} = \frac{|f''(0)|}{2}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

九、首先证在$[0,1]$上$f(x)\equiv 0$.

由于$f(x)$在$[0,1]$连续，故$|f(x)|$在$[0,1]$上连续，故$|f(x)|$在$[0,1]$上有最大值，即$\exists\ x_0\in[0,1]$，使

$M=|f(x_0)|=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$，若$x_0=0$，得证. 否则由拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi\in(0,x_0)$，使

$$M=|f(x_0)|=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi)x_0|$$
$$\leqslant p|f(\xi)||x_0|\leqslant pM$$

由于$0<p<1$，故只能$M=0$. 故在$[0,1]$上，$f(x)\equiv 0$.

利用同样方法可证得在$[-1,0]$上，$f(x)\equiv 0$.

利用$|f(x)|$的连续性及$f(-1)=0$，$f(1)=0$可分别证得在$[-2,-1]$和$[1,2]$上，$f(x)\equiv 0$. 如此下去，可证得在$[-(n+1),-n]$和$[n,n+1]$上，$f(x)\equiv 0$，$n=1$，2，…

因此，在实轴上，$f(x)\equiv 0$.

模拟竞赛试题五及解析

试　　题

一、填空

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)(x+2)} & x\neq 1,-2\\ 2 & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 处连续，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

2. 设 $u_n=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right]^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ ________.

3. 椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标面 yOz 上的投影为 ________.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$ ________.

5. 设 $u_0=0, u_1=1, u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}, (n=1,2,\cdots), f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n!}x^n$，则 $f(x)$ 所满足的微分方程为 ________.

6. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 可微，且 $f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=$ ________.

7. 设 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域，则二重广义积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，对任意正数 a，b，积分 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，且 $f(1)=1$，则 $f(x)=$ ________.

9. 点 $(0,4)$ 到抛物线 $y=\dfrac{x^2}{10}$ 的距离为 ________.

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_1^t \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\arctan g(y)\mathrm{d}y =$ ________.

二、证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$，$0\leqslant x\leqslant \pi$.

三、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$.

四、函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 为趋于零的正数数列，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$$

五、计算曲线积分 $I=\oint_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 C 为曲线 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=Rx(R>0)$，若从 z 轴正向看去，C 的方向为逆时针方向.

六、设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a 及方程的解.

七、计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(a>0,b>0)$.

八、设 $f(x)=3x^2+g(x)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$g(x)=4x-f(x)+2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$，$g(x)$.

九、设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证明：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

解　　析

一、1. 由题意，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=f(1)=2$$

又 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)(x+2)=0$

故 $\lim\limits_{x\to1}(x^4+ax+b)=0$

即 $1+a+b=0$

又 $$\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{x-1}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}(4x^3+a)=\frac{1}{3}(4+a)=2$$

解得 $a=2,\ b=-3$

故填 2 和 -3

2. $$u_n=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(1+k)}\right]^n=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]^n$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-n}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\mathrm{e}^{-1}$$

故填 e^{-1}

3. 设椭球面向 yOz 平面的投影柱面为 S，S 与椭球面相切于曲线 C，在 C 上，x 为 y，z 的单值函数，故在 C 上

$$x^2-yx+y^2+z^2-1=0$$

的判别式

$$\Delta=(-y)^2-4(y^2+z^2-1)=0$$

即 $3y^2-4z^2-4=0$

故填 $\begin{cases}3y^2+4z^2\leqslant4\\x=0\end{cases}$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$=x\left(x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right)'=x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'$$

$$=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\lim_{x\to 1^-}x(1+x)=2$$

故填 2

5. $$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{au_n+bu_{n-1}}{n!}x^n$$

$$=1+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{n!}x^n$$

$$=1+af(x)+b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{n!}x^n$$

$$f''(x)=af'(x)+b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=af'(x)+bf(x)$$

又 $$f(0)=0,\ f'(0)=1+af(0)=1$$

故填 $\begin{cases}f''(x)-af'(x)-bf(x)=0\\ f(0)=0\\ f'(0)=1\end{cases}$

6. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\big|_{x=1}=3\varphi^2(x)\varphi'(x)\big|_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]\big|_{x=1}$$

$$=3\times1\times[2+3(2+3)]=51$$

故填 51

7. $$\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\sqrt{y}/3}^{\sqrt{y}/2} x dx$$

$$= \frac{5}{72}\int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{5}{72}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{5}{144}$$

故填$\frac{5}{144}$

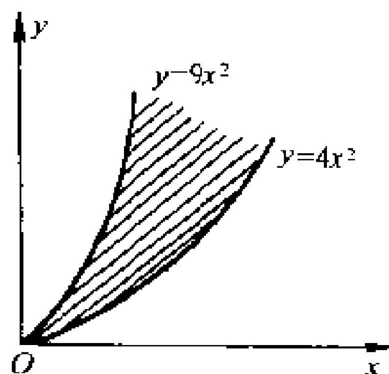


图 89

8. 由于积分与 a 无关，故

$$\frac{d}{da}\int_a^{ab} f(x)dx = f(ab)b - f(a) = 0$$

令 $ab=1$，得 $f(a)=b=\frac{1}{a}$.

故填 $\frac{1}{x}$

9. 设$\left(x,\frac{x^2}{10}\right)$是抛物线上任一点，令

$$f(x) = d^2 = x^2 + \left(\frac{x^2}{10} - 4\right)^2 = \frac{x^4}{100} + \frac{1}{5}x^2 + 16$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{25} + \frac{2}{5}x = \frac{x}{25}(x^2 + 10)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$. $f''(x)=\frac{3}{25}x^2+\frac{2}{5}$，$f''(0)=\frac{2}{5}>0$

故 $f(0)=f_{\min}$，又 $f(0)=16$，$d|_{x=0}=4$

故填 4

10. 填 $\int_0^{f(t)} \arctan g(y)dy$

二、首先求 $3x^2-6\pi x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上以 2π 为周期的余弦级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2 - 6\pi x)dx = -4\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2 - 6\pi x)\cos nx dx$$

$$= \frac{12}{n^2} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

故 $$3x^2-6\pi x=-2\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx,\ x\in[0,\pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2),\ x\in[0,\pi]$$

三、$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!(k+2)+(k+2)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!+(k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}$$

由于 $$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{k!(k+2)}=\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k!}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\left(x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x(x(\mathrm{e}^x-1))\mathrm{d}x$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1-\frac{x^2}{2}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$

$$=S(1)=\left(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

四、根据泰勒公式

$$f(x_0+\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\alpha_n+o(\alpha_n)$$

$$f(x_0-\beta_n)=f(x_0)+f'(x_0)(-\beta_n)+o(\beta_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\frac{o(\alpha_n)+o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}\right]=f'(x_0)$$

其中 $$\left|\frac{o(\alpha_n)+o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}\right|\leqslant\left|\frac{o(\alpha_n)}{\alpha_n-\beta_n}\right|+\left|\frac{o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{o(\alpha_n)}{\alpha_n}\right|+\left|\frac{o(\beta_n)}{\beta_n}\right|$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{o(\alpha_n)}{\alpha_n}\right|+\left|\frac{o(\beta_n)}{\beta_n}\right|\right)=0$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{o(\alpha_n)+o(\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=0$

五、设球面上由曲线 C 围成的部分曲面为 S，则 S 上侧单位法向量为

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right\}$$

由斯托克斯公式

$$I=\iint_S -2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_S(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{R}\iint_S(zx+xy+zy)\mathrm{d}S \quad \text{（利用对称性）}$$

$$=-\frac{2}{R}\iint_S zx\mathrm{d}S=-2\iint_S x\frac{z}{R}\mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_S x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\rho^2\cos\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi}{4}R^3$$

六、 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入已知方程中，得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

由题意 $\begin{cases}6+a-a^2=0\\10+5a\neq 0\end{cases}$

解得 $a=3$

由$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial v}=0$，得

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi(u)$$

$$z=\int\varphi(u)\mathrm{d}u+\psi(v)$$

其中 $\varphi(u)$、$\psi(v)$是任意可导函数.

七、$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

八、两方程分别对 x 求导

$$\begin{cases}f'(x)=6x+g'(x)\\g'(x)=4-f'(x)\end{cases}$$

解得 $f'(x)=3x+2$， $g'(x)=2-3x$

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+C_1$$

$$g(x)=2x-\frac{3}{2}x^2+C_2$$

有　　　$f(0)=C_1$，　$g(0)=C_2$

由已知方程，得

$$f(0)=g(0)-\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2+2x+C_1\right)\mathrm{d}x$$

$$=g(0)-\frac{3}{2}-C_1$$

$$g(0)=-f(0)+2\int_0^1\left(2x-\frac{3}{2}x^2+C_2\right)\mathrm{d}x$$

$$=-f(0)+1+2C_2$$

故有

$$\begin{cases}C_1=C_2-\dfrac{3}{2}-C_1\\ C_2=-C_1+1+2C_2\end{cases}$$

解得　　　$C_1=-\dfrac{5}{2}$，$C_2=-\dfrac{7}{2}$

故　　　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+2x-\dfrac{5}{2}$

$$g(x)=2x-\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}$$

九、令　$F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$

由拉格朗日中值定理，∃ $a\in(-2,0)$，$b\in(0,2)$，使

$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\quad f'(b)=\frac{f(2)-f(0)}{2}$$

由于$|f(x)|\leqslant 1$，故

$$|f'(a)|\leqslant\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(-2)|\leqslant 1$$

同理　　　$|f'(b)|\leqslant 1$

故　　　$F(a)\leqslant 2$，$F(b)\leqslant 2$

因为 $F(x)$在$[a,b]$上连续，故 $F(x)$在$[a,b]$上有最大值，即∃ $\xi\in[a,b]$，使

$$F(\xi)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}F(x)$$

由于　　　$F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4$

有　　　$F(0)\geqslant F(a)$，$F(0)\geqslant F(b)$

故 $\xi \in (a,b)$. 又 $F(x)$在(a,b)内可导，故有

$$F'(\xi)=0$$

即 $$2f'(\xi)(f(\xi)+f''(\xi))=0$$

由于 $$F(\xi)=f^2(\xi)+(f'(\xi))^2 \geqslant F(0)=4$$

而$|f(\xi)| \leqslant 1$，故 $f'(\xi) \neq 0$，因此有

$$f(\xi)+f''(\xi)=0, \quad \xi \in (a,b) \subset (-2,2)$$

模拟竞赛试题六及解析

试　　题

一、填空

1. 当 $x \to 0$ 时，$e^x+\ln(1-x)-1$ 与 ax^n 是同阶无穷小，则 n $=$________，$a=$________.

2. 设 $x=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt$，则$\frac{d^3y}{dx^3}=$________.

3. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义，在 $x=0$ 处连续，且满足 $f(\lambda x)=f(x)$（$|\lambda|>1$ 是常数），$f(0)=7$，则 $f(x)=$______.

4. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$，则 $\lambda=$______，$\mu=$______.

5. 直线 L：$\begin{cases}x+y+b=0\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点$(1,-2,5)$，则 $a=$____，$b=$____.

6. 级数 $1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$的收敛域为________.

7. 圆$(x-R)^2+y^2=r^2(0<r<R)$绕 y 轴旋转一周所成圆环体的表面积 $S=$____.

8. $p(x)$是一六次多项式，已知曲线 $y=p(x)$与 x 轴切于原点，且以$(-1,1)$，$(1,1)$为拐点，又在$(-1,1)$，$(1,1)$处有水平切线，则 $p(x)=$____.

9. $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ （$a>0$ 是常数）的最大值为____.

10. 已知$\int_0^{+\infty}e^{-kx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ （$k>0$），则

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}dx=$ ______.

二、求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

三、设 $F(x,y,z)$具有连续偏导数，求曲面 $F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面，并证明切平面过一个定点.

四、已知 $f_n(x)$满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$($n$ 为正整数)，且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$之和.

五、计算曲线积分 $\int_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 是曲线 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$上由 $A\left(-\frac{3}{4}\pi,0\right)$到 $B\left(\frac{\pi}{4},0\right)$的一段.

六、设半径为 R 的球的球心在以原点为中心，半径为 a($2a>R>0$,a 是常数)的定球面上，当 R 等于多少时前者夹在定球面内部的表面积最大？

七、设 $a>0$，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n(n+1)/2}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$的敛散性.

八、从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力的作用下由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力与浮力的作用. 设仪器质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k($k>0$)，试求函数关系式 $y=y(v)$.

九、若当 $x\in[a,b]$时，$f(x)>0$，$f'(x)>0$，试证：存在点 $\xi\in(a,b)$，使由直线 $x=a$，$y=f(\xi)$与曲线 $y=f(x)$所围图形的面积与由直线 $y=f(\xi)$，$x=b$ 及曲线 $y=f(x)$所围图形面积之比等于 k.

解　析

一、1. $e^x+\ln(1-x)-1$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)+\left(-x-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}+o(x^3)\right)-1$$

$$=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

故分别填 3 和 $-\frac{1}{6}$

2. 方程两边对 x 求导

$$1=\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}\frac{dy}{dx},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{1+4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4y}{\sqrt{1+4y^2}}\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{\sqrt{1+4y^2}}\sqrt{1+4y^2}=4y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=4\frac{dy}{dx}=4\sqrt{1+4y^2}$$

故填 $4\sqrt{1+4y^2}$

3. 对$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(x)=f\left(\frac{x}{\lambda}\right)=f\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)$$

由于 $f(x)$在 $x=0$ 连续，故有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)=f(0)=7$$

故填 7

4. 令 $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

$$\lambda=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$$

$$\mu=\lim_{x\to\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-x)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}(-x)\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

故填-1和0

5. 曲面在$(1,-2,5)$处的法向量为

$$\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right\} = \{2x,2y,-1\} = \{2,-4,-1\}$$

切平面π的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$$

即
$$2x-4y-z-5=0$$

由L的方程得

$$y=-x-b,\quad z=x-3+a(-x-b)$$

代入π的方程得

$$(5+a)x+4b+ab-2=0$$

故
$$5+a=0,\quad 4b+ab-2=0$$

解得
$$a=-5,\quad b=-2$$

故填-5和-2

6. 当$x=1$，级数为

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

收敛.

当$x>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}$收敛，故原级数发散.

当$x<1$，级数为$1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right]\Big/\frac{1}{(2n)^x}=1$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}$发散，故原级数发散.

故填$x=1$

7. 如图90，圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = R + r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

$$dS = 2\pi x dl = 2\pi(R + r\cos t)r dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi(R + r\cos t)r dt = 4\pi^2 Rr$$

故填 $4\pi^2 Rr$

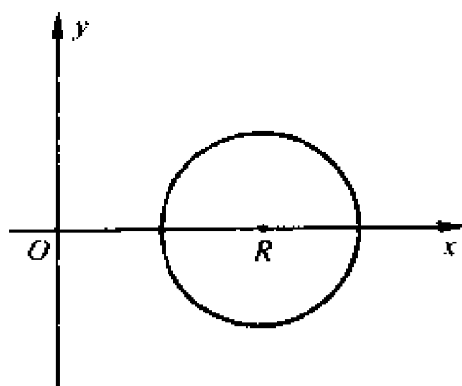


图 90

8. 因为 $(-1,1)$，$(1,1)$ 为拐点，故 y'' 有因式 $(x+1)(x-1)$，由于此二点处有水平切线，故 y' 有因式 $(x+1)(x-1)$，因此 y' 有因式 $(x+1)^2(x-1)^2$，又曲线与 x 轴切于原点，故 y' 有因式 x，因此设

$$y' = ax(x+1)^2(x-1)^2 = a(x^5 - 2x^3 + x)$$

故
$$y = a\left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + C$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入，得 $C=0$. 将 $x=1$，$y=1$ 代入，得 $a=6$，故

$$y = x^6 - 3x^4 + 3x^2$$

故填 $x^6-3x^4+3x^2$

9. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x} & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x} & 0\leqslant x\leqslant a \\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a} & x>a \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(1+a-x)^2} & x<0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2} & 0<x<a \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{-1}{(1+x-a)^2} & x>a \end{cases}$$

当 $x<0$，$f'(x)>0$，$f(x)<f(0)=\dfrac{2+a}{1+a}$

当 $x>a$，$f'(x)<0$，$f(x)<f(a)=\frac{2+a}{1+a}$

当 $0<x<a$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a}$$

由于 $$\frac{2+a}{1+a}-\frac{4}{2+a}=\frac{a^2}{(1+a)(2+a)}>0$$

$$f_{\max}=\frac{2+a}{1+a}$$

故填 $\frac{2+a}{1+a}$

10. $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x^2}-e^{-3x^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}(e^{-3x^2}-e^{-2x^2})d\,\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}(e^{-3x^2}-e^{-2x^2})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(4e^{-2x^2}-6e^{-3x^2})dx$$

$$=0-4\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+6\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$$

故填 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$

二、$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$$<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$$>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{2}{\pi}$$

根据夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}$$

三、令 $G(x,y,z)=F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)$

$$G'_x=\frac{1}{z}F'_2+\frac{-y}{x^2}F'_3,\qquad G'_y=\frac{-z}{y^2}F'_1+\frac{1}{x}F'_3$$

$$G'_z=\frac{1}{y}F'_1+\frac{-x}{z^2}F'_2$$

故曲面在 M_0 处切平面方程为

$$\left(\frac{1}{z_0}F'_2\Big|_{M_0}-\frac{y_0}{x_0^2}F'_3\Big|_{M_0}\right)(x-x_0)+$$

$$\left(-\frac{z_0}{y_0^2}F'_1\Big|_{M_0}+\frac{1}{x_0}F'_3\Big|_{M_0}\right)(y-y_0)+$$

$$\left(\frac{1}{y_0}F'_1\Big|_{M_0}-\frac{x_0}{z_0^2}F'_2\Big|_{M_0}\right)(z-z_0)=0$$

即 $\left(\frac{1}{z_0}F'_2\Big|_{M_0}-\frac{y_0}{x_0^2}F'_3\Big|_{M_0}\right)x+\left(-\frac{z_0}{y_0^2}F'_1\Big|_{M_0}+\frac{1}{x_0}F'_3\Big|_{M_0}\right)y+$

$$\left(\frac{1}{y_0}F'_1\Big|_{M_0}-\frac{x_0}{z_0^2}F'_2\Big|_{M_0}\right)z=0$$

不论 M_0 如何，切平面总是通过原点.

四、$f'_n(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$

$$f_n(x)=e^{-\int -dx}\left(C+\int x^{n-1}e^x e^{\int -dx}dx\right)$$

$$=e^x\left(C+\frac{x^n}{n}\right)$$

由 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $C=0$，$f_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= e^x \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = e^x \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

$$= e^x(-\ln(1-x)) = e^x \ln \frac{1}{1-x}$$

$$x \in [-1,1)$$

五、 $$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

如图 91 取 $\widehat{MN}$：$x^2+y^2=\varepsilon^2$ （$y \geqslant 0$，ε 是很小的正数）

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2} = \int_{\overline{AM}+\widehat{MN}+\overline{NB}} \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_{\widehat{MN}} \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\widehat{MN}} -y dx + x dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\pi}^{0} [-\varepsilon \sin t(-\varepsilon \sin t) + \varepsilon \cos t \cdot \varepsilon \cos t] dt$$

$$= \int_{\pi}^{0} dt = -\pi$$

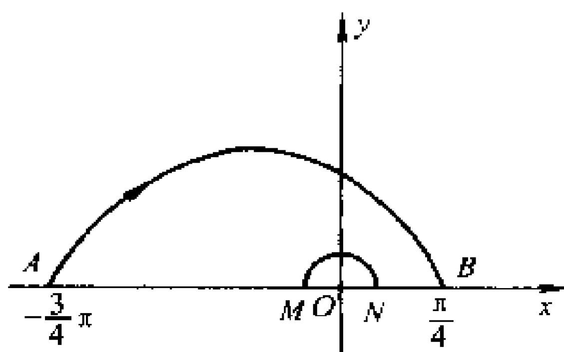


图 91

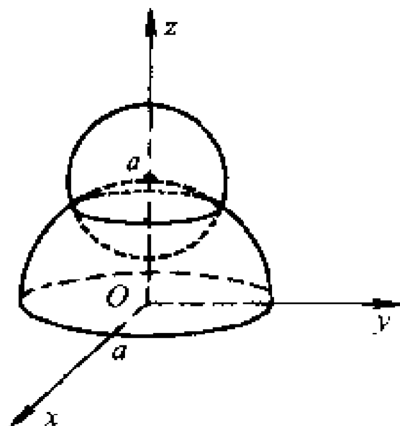


图 92

六、如图 92 建立坐标系，其中定球球心在原点，半径为 R 的

球球心在(0,0,a)，则两球面方程分别为

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$
$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$$

消去 z 得

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2)$$

$$S:z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

S 位于定球面内部的面积为

$$A(R)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}$$
$$A'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a}$$

令 $A'(R)=0$，得 $R=\frac{4}{3}a$　($R=0$ 舍去)

$$A''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a},\ R''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0$$

故当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，$A(R)$最大.

七、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}$

$$=\begin{cases}0 & 0<a<1\\ \dfrac{1}{2} & a=1\\ 1 & a>1\end{cases}$$

故当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，级数收敛.

当 $a>1$，记 $b=\dfrac{1}{a}$，有 $0<b<1$，且

$$u_n=\frac{1}{(1+b)(1+b^2)\cdots(1+b^n)}\qquad (\text{利用 } e^x>1+x)$$

$$>\frac{1}{e^b\cdot e^{b^2}\cdots e^{b^n}}$$

$$=\frac{1}{e^{b+b^2+\cdots+b^n}}=\frac{1}{e^{\frac{b(1-b^n)}{1-b}}}>\frac{1}{e^{\frac{b}{1-b}}}$$

由此有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故此时级数发散.

八、由题设，仪器受力：重力 mg，浮力 $B\rho$，阻力 kv，根据牛顿第二定律

$$\begin{cases}m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv\\ y|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

由于 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$，故有

$$\begin{cases}mv\dfrac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv\\ v|_{y=0}=0\end{cases}$$

$$dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$$

积分得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C$$